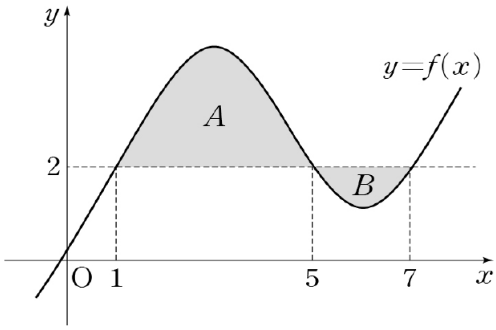
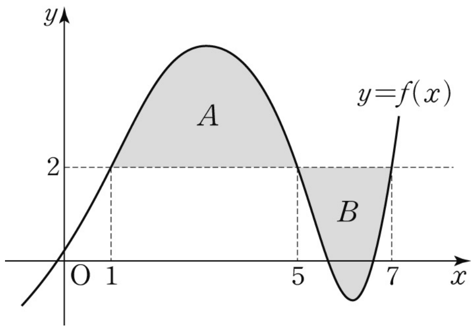
이지핏 모의고사 수학영역 정오표 (2021.09.24.)

4회 18번

구분	수정 전	수정 후
문제		

4회 기하 29번

구분	수정 전	수정 후
문제	**29.** 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O 이고 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)\ (p>0)$ 인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 A와 점 F를 지나고 직선 $x=-p$와 점 B에서 접하는 원에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{3}$ 이고 삼각형 ABF는 정삼각형이다. 직선 BF가 이 포물선과 만나는 점을 C라 할 때, 점 C의 x좌표는 $a+b\sqrt{3}$ 이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이고, 점 A의 y좌표는 점 B의 y좌표보다 크다.) [그래프]	**29.** 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O 이고 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)\ (p>0)$ 인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 A와 점 F를 지나고 직선 $x=-p$와 점 B에서 접하는 원에 대하여 $\overline{\mathrm{BF}}=4\sqrt{3}$ 이고 $\angle\mathrm{BFO}=\frac{\pi}{6}$ 인 삼각형이다. ~
해설	[그래프] ~~정삼각형 ABF에 외접하는~~(삭제) 원의 중심을 P라 하면 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PF}}$ 이므로 포물선의 초점 F와 준선 $x=-p$와의 거리가 같다. 포물선의 정의를 만족시키므로 원의 중심 P는 포물선 위의 점이다. $\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{3}$ 이므로 원의 반지름 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PF}}=4$이고 ~~원주각과 중심각의 관계에서 $\angle\mathrm{BAF}=60^\circ$ 이므로 $\angle\mathrm{BPF}=120^\circ$~~ ~~$\angle\mathrm{PBF}=\angle\mathrm{PFB}=30^\circ$ 이고 선분 $\overline{\mathrm{BP}}$가 x축과 평행하므로 $\angle\mathrm{BFO}=30^\circ$~~ (삭제) 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{HF}}=4\cos 60^\circ=2$ ~	[그래프] 원의 중심을 P라 하면 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PF}}$ 이므로 포물선의 초점 F와 준선 $x=-p$와의 거리가 같다. 포물선의 정의를 만족시키므로 원의 중심 P는 포물선 위의 점이다. $\overline{\mathrm{BF}}=4\sqrt{3}$ 이므로 원의 반지름 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PF}}=4$이고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{HF}}=4\cos 60^\circ=2$ ~

4회 미적분 30번 **<기존 문항 교체>**

구분	내용

문제

30. 양의 실수 전체 집합에서 증가하는 미분가능한 함수 $f(x)$와 그 역함수를 $g(x)$라 할 때, $f(x)$와 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(4+x)+f(4-x)=10$
>
> (나) $3 \le x \le 5$일 때, $f(x)=(10-x)e^x-7e^3+4-\int_3^x e^t f(8-t)\,dt$이다.
>
> (다) $f(6)=10-k$를 만족시키는 상수 k에 대하여 $\int_k^5 e^{g(x)}\,dx=e^4-(k+2)e^2$이다.

$\int_2^5 e^x f(x)\,dx=ae^5+be^2+1$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

해설과 정답

〈유형〉 적분
〈해설〉
조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 점 $(4,\ 5)$에 대하여 대칭인 함수이므로

$f(8-x)+f(x)=10$ ……… ㉠

조건 (나)에서 $x=3$을 양변에 대입하면 $f(3)=4$,
㉠에 의하여 $f(5)=6$

$$f(x)=(10-x)e^x-7e^3+4-\int_3^x e^t\{10-f(t)\}\,dt$$
$$=(10-x)e^x-7e^3+4-\int_3^x\{10e^t-e^tf(t)\}\,dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=-e^x+(10-x)e^x-10e^x+e^xf(x)$$
$$=-e^x-xe^x+e^xf(x)$$

$3 \le x \le 5$에서 $e^xf(x)=f'(x)+(x+1)e^x$ ……… ㉡

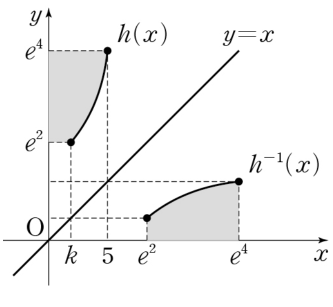
조건 (다)에서 $k=10-f(6)=f(2)$

$g(k)=g(f(2))=2$이므로 $e^{g(k)}=e^2$

조건 (가)에서 $x=0$을 대입하면

$2f(4)=10$, $f(4)=5$, $g(5)=4$이므로 $e^{g(5)}=e^4$

$e^{g(x)}=h(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 점 $(k,\ e^2)$, 점 $(5,\ e^4)$을 지난다.



$h(x)$의 역함수를 구하면

$y=e^{g(x)}$에서 $x=e^{g(y)}$이므로

$\ln x=g(y)$이고

$y=g^{-1}(\ln x)=f(\ln x)$

$h^{-1}(x)=g^{-1}(\ln x)$

$h^{-1}(x)=f(\ln x)$

$\ln x=t$라 하면 $x=e^t$

양변을 t에 대하여 미분하면 $\dfrac{dx}{dt}=e^t$

$x=e^2$일 때, $t=2$,

$x=e^4$일 때, $t=4$이므로

$$\int_k^5 e^{g(x)}\,dx=5e^4-\int_{e^2}^{e^4}h^{-1}(x)\,dx-ke^2$$
$$=5e^4-\int_2^4 e^tf(t)\,dt-ke^2$$
$$=e^4-(k+2)e^2$$

$\int_2^4 e^tf(t)\,dt=4e^4+2e^2$ ……… ㉢

㉡, ㉢에 의하여

$$\int_2^5 e^xf(x)\,dx$$
$$=\int_2^4 e^xf(x)\,dx+\int_4^5 e^xf(x)\,dx$$
$$=4e^4+2e^2+\int_4^5\{f'(x)+(x+1)e^x\}\,dx$$
$$=4e^4+2e^2+[f(x)]_4^5+[(x+1)e^x]_4^5-\int_4^5 e^x\,dx$$
$$=4e^4+2e^2+f(5)-f(4)+6e^5-5e^4-(e^5-e^4)$$
$$=5e^5+2e^2+1$$

따라서 $a=5$, $b=2$이므로 $a+b=7$

〈정답〉 7