이지수능교육

응답하라, 나의 꿈!

431프로젝트

고3 2018년 09월 수학나형
최고난도 및 유형

이지오답핏

www.i-ez.net | 02-571-8170

응답하라, 나의 수능 - 나를 알아주는 최적의 학습 시스템

▮ 문항별 분석

번호	대분류	중분류	소분류	배점	정답률
01	지수와 로그	지수	지수식의 계산: 기본	2	93%
02	집합과 명제	집합	집합	2	94%
03	수열의 극한	수열의 극한	무한등비수열의 극한	2	91%
04	함수	함수	역함수	3	95%
05	확률	확률의 덧셈정리	확률의 덧셈 정리	3	87%
06	함수의 극한과 연속	함수의 극한	도형, 그래프와 함수의 극한	3	89%
07	집합과 명제	명제	명제	3	89%
08	다항함수의 적분법	정적분	정적분의 성질과 계산	3	91%
09	순열과 조합	이항정리	이항정리, 다항정리	3	91%
10	함수	유리함수와 무리함수	무리함수	3	93%
11	수열	수학적 귀납법	기타 점화식	3	91%
12	확률	조건부확률	조건부 확률 (문장, 표)	3	79%
13	수열	등차수열과 등비수열	등차수열의 일반항	3	91%
14	다항함수의 미분법	도함수의 활용	변화율	4	76%
15	다항함수의 미분법	도함수의 활용	방정식에의 활용	4	75%
16	순열과 조합	분할	분할	4	69%
17	통계	통계적 추정	모평균의 추정	4	65%
18	함수의 극한과 연속	함수의 연속	함수의 연속성	4	49%
19	수열의 극한	급수	무한등비급수와 도형(넓이)	4	58%
20	확률	조건부확률	독립시행의 확률	4	63%
21	다항함수의 미분법	도함수의 활용	방정식에의 활용	4	42%
22	순열과 조합	순열과 조합	조합	3	88%
23	다항함수의 미분법	미분계수	미분계수	3	90%
24	함수	유리함수와 무리함수	유리함수	3	78%
25	지수와 로그	로그	로그의 정의	3	85%
26	수열	등차수열과 등비수열	등비수열의 합	4	81%
27	통계	확률분포	이항분포	4	68%
28	다항함수의 적분법	정적분	정적분의 성질과 계산	4	58%
29	수열	여러 가지수열	시그마로 표시된 수열의 합과 ...	4	27%
30	다항함수의 미분법	도함수의 활용	방정식에의 활용	4	5%

킬/러/문/항/

고3 2018년 09월 평가원 수학나형 21번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 다항함수의 미분법 | 도함수의 활용 | 방정식에의 활용

001 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 $x\geq 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수) (나) $1<x<5$에서 $g(x)$는 감소한다. (다) $x>5$에서 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)

$f(\sqrt{2})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

유사문제

§ 출전 : 고3 2017년 수능 수학나형 29번

002 두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x \le a)\\ (x-1)^2(2x+1) & (x>a)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x \le k)\\ 12(x-k) & (x>k)\end{cases}$$

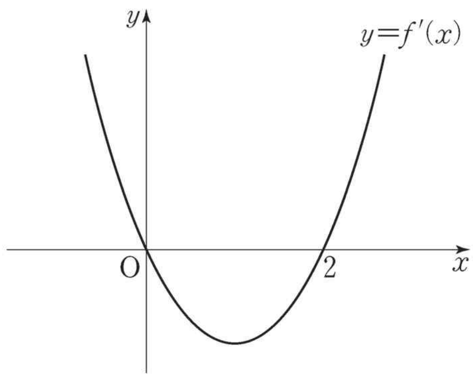
이고, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

§ 출전 : 고3 2016년 06월 평가원 수학나형 21번

003 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $f(0)<0$ 이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.

ㄴ. $f(0)f(2) \ge 0$이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

킬/러/문/항/

고3 2018년 09월 평가원 수학나형 27번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 통계 | 확률분포 | 이항분포

004 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+1\right)=5$일 때, n의 값을 구하시오. [4점]

유사문제

§ 출전 : 고3 2009년 06월 평가원 수학가형 13번

005 어느 창고에 부품 S가 3개, 부품 T가 2개 있는 상태에서 부품 2개를 추가로 들여왔다. 추가된 부품은 S 또는 T이고, 추가된 부품 중 S의 개수는 이항분포 $\mathrm{B}\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다. 이 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 때, 추가된 부품이 모두 S였을 확률은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

§ 출전 : 2016년 E변형특강 수학가형 PART03 51번

006 A 백화점에서는 30만원 이상 구매한 고객에게 경품 행사를 진행하고 있다. 네 면에는 2000이 적혀있고 나머지 두 면에는 0이 적혀있는 주사위를 10번 던져서 나온 금액의 합에 1000원을 더하여 경품 금액으로 받는다고 한다. 경품 행사에 참여하여 받는 금액을 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{V}\left(\frac{3}{100}\mathrm{X}\right)+\mathrm{E}(3\mathrm{X})$의 값은?

① 40000 ② 43000 ③ 45000
④ 48000 ⑤ 51000

킬/러/문/항/

고3 2018년 09월 평가원 수학나형 28번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 다항함수의 적분법 | 정적분 | 정적분의 성질과 계산

007 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2+t,\ \ v_2(t)=2t^2+3t$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 a라 할 때, $9a$의 값을 구하시오. [4점]

§ 출전 : 고3 2013년 수능리허설 수학B형 01회 21번

008 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)\,dt \geq 0$를 만족시킨다.

(나) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값, $x=b$에서 극솟값을 가지고 $f(a)f(b)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f'(0)>0$

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 음이 아닌 서로 다른 세 실근을 갖는다.

ㄷ. $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$라 할 때, $g(4)=0$이면 $f(x)+f(4-x)=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

§ 출전 : 고3 2017년 10월 학력평가 수학나형 16번

009 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & (x<0) \\ -x^2+2x+2 & (x \geq 0) \end{cases}$$ 라 하자.

양의 실수 a에 대하여 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$의 최댓값은? [4점]

① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$ ④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

킬/러/문/항/

고3 2018년 09월 평가원 수학나형 29번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

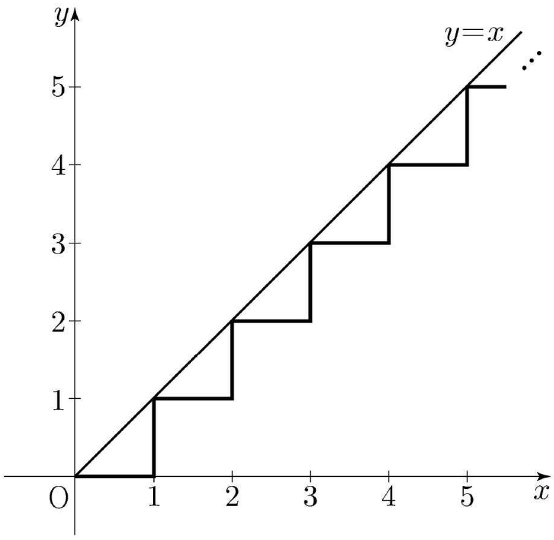
문제

§ 세부단원정보 : 수열 | 여러가지수열 | 시그마로 표시된 수열의 합과 일반항

010 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

> (ⅰ) A_0은 원점이다.
>
> (ⅱ) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\dfrac{2n-1}{25}$ 만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{4}{25},\ 0\right)$, $\left(1,\ \dfrac{11}{25}\right)$이다. 자연수 n에 대하여 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하시오. [4점]



유사문제

§ 출전 : 고3 2017년 04월 학력평가 수학나형 27번

011 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a_k = n(n+1)(4n-1)$ 일 때, a_{20}의 값을 구하시오. [4점]

§ 출전 : 고3 2016년 수능 수학나형 21번

012 좌표평면에서 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+10 & (x<10) \\ (x-10)^2 & (x \geq 10) \end{cases}$과 자연수 n에 대하여 점 $(n,\ f(n))$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_n이 있다. x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분에 있는 모든 점의 개수를 A_n, 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분에 있는 모든 점의 개수를 B_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20}(A_n-B_n)$의 값은? [4점]

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

킬/러/문/항/

고3 2018년 09월 평가원 수학나형 30번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 다항함수의 미분법 | 도함수의 활용 | 방정식에의 활용

013 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b이다.

$$f'(1) < 0,\ f'(2) < 0,\ f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$) [4점]

유사문제

§ 출전 : 고3 2017년 10월 학력평가 수학나형 30번

014 함수 $f(x)=|3x-9|$ 에 대하여 함수 $g(x)$는

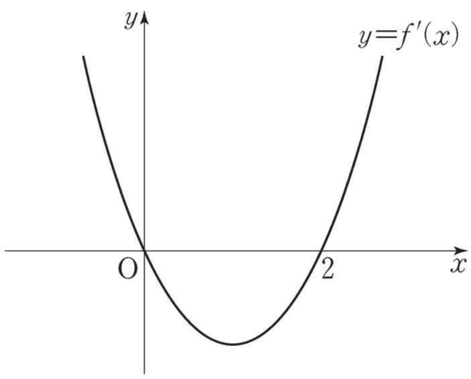
$$g(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}f(x+k) & (x<0) \\ f(x) & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $h(k)$의 값의 합을 구하시오. (단, $k>0$) [4점]

> (가) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) $h'(3)=15$

§ 출전 : 고3 2016년 06월 평가원 수학나형 21번

015 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $f(0)<0$ 이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.
ㄴ. $f(0)f(2) \ge 0$이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.
ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 해설

응답하라. 나의 수능 – 나를 알아주는 최적의 학습 시스템

1 정답 ④

출제의도 : 사차함수의 그래프의 특징과 정적분으로 정의된 함수의 조건을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

이때 $f(t)\geq 0$인 구간에서는

$f(t)-|f(t)|=0$,

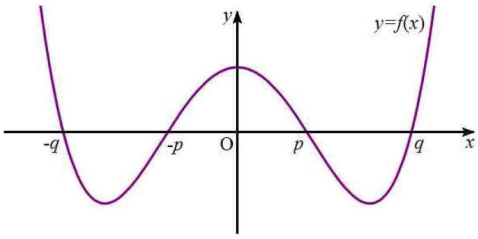
$f(t)<0$인 구간에서는

$f(t)-|f(t)|=2f(t)<0$

이고, 조건 (가)에 의하여 $-1\leq t\leq 2$일 때 $f(t)\geq 0$이어야 한다.

또, 조건 (나)에 의하여 $f(t)<0$인 구간이 있어야 한다.

따라서 $f(0)>0$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



위 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 네 점의 x좌표를 각각 $-q$, $-p$, p, $q(0<p<q)$라 하자.

(i) $0<x<\frac{p}{2}$일 때, 구간 $[-x,\ 2x]$에서 $f(x)\geq 0$이므로

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}0dt=0$$

조건 (가)에 의하여 $0<x<1$일 때 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)이므로

$\frac{p}{2}\geq 1$, 즉 $p\geq 2$

(ii) $\frac{p}{2}<x<q$일 때, 구간 $[-x,\ 2x]$에서 $f(x)<0$인 구간이 점점 커지므로 $g(x)$는 감소한다.

조건 (나)에 의하여 $1<x<5$일 때 $g(x)$는 감소하므로

$\frac{p}{2}\leq 1$, $q\geq 5$

즉, $p\leq 2$, $q\geq 5$

(iii) $x>q$때, 구간 $[-x,\ -q]$와 구간 $[q,\ 2x]$에서 $f(x)\geq 0$이므로

$g(x)=g(q)$

조건 (다)에 의하여 $x>5$일 때 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)이므로

$q\leq 5$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$p=2$, $q=5$

따라서

$f(x)=(x+2)(x-2)(x+5)(x-5)$

$=(x^2-4)(x^2-25)$

이므로

$f(\sqrt{2})=(-2)\times(-23)=46$

2 정답: 32

출제의도: 미분가능성을 이해하고 있으며 미분을 이용하여 부등식에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이:

함수 $f(x)$는 $x<a$, $x>a$일 때, 다항함수이므로 이 범위에서 미분가능하다.

한편, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 실수전체의 집합에서 미분가능해야 하므로

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능해야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{0-0}{x-a}=0\ \cdots\cdots\ ㉠$$

또,

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-a}$$

여기서 $x\to a+$일 때 (분모)→0이고 극한값이 존재해야 하므로 (분자)→0에서

$$\lim_{x\to a+}(x-1)^2(2x+1)=0$$

$(a-1)^2(2a+1)=0$

$a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

(i) $a=-\frac{1}{2}$일 때,

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}2(x-1)^2$$

$$=\frac{9}{2}$$

이 값은 ㉠의 값과 다르므로 $a=-\frac{1}{2}$일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하지않다.

(ii) $a=1$일 때,

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$= \lim_{x \to 1+} \frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-1}$

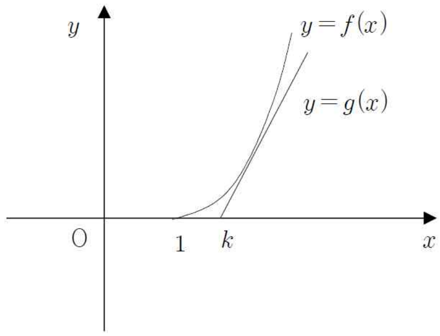
$= \lim_{x \to 1+} (x-1)(2x+1)$

$= 0$

이 값은 ㉠의 값과 같으므로 $a=1$일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하다.

따라서, (i), (ii)에서 $a=1$이다.

한편, 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq g(x)$이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 접해야 한다.



$x>1$일 때, 함수 $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$와 접하고 기울기가 12인 접선의 접점을$(m,\ f(m))$ $(m>1)$라 하자.

$f'(x)$

$=\{(x-1)^2\}'(2x+1)+(x-1)^2(2x+1)'$

$=2(x-1)(2x+1)+2(x-2)^2$

$=(x-1)\{(4x+2)+(2x-2)\}$

$=6x(x-1)$

이때, 접선의 기울기가 12이므로

$6m(m-1)=12$

$m^2-m-2=0$

$(m+1)(m-2)=0$

$m=-1$ 또는 $m=2$

이때, $m>1$이므로

$m=2$

그러므로 접선의 방정식은

$y-5=12(x-2)$

$y=12x-19$

$y=12\left(x-\frac{19}{21}\right)$

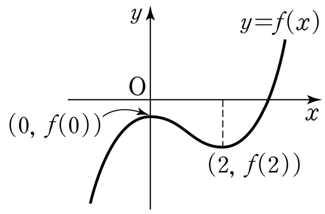
따라서, $k \geq \frac{19}{12}$이므로 k의 최솟값은 $\frac{19}{12}$이다.

그러므로

$a+p+q=1+12+19=32$

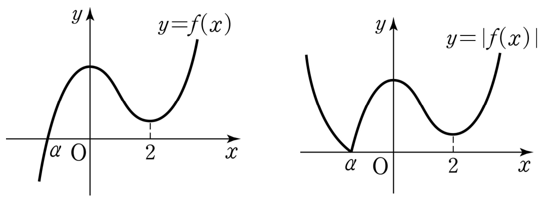
3 [정답] ⑤

ㄱ. $f(0)<0$이면



$\therefore\ |f(0)|<|f(2)|$ (참)

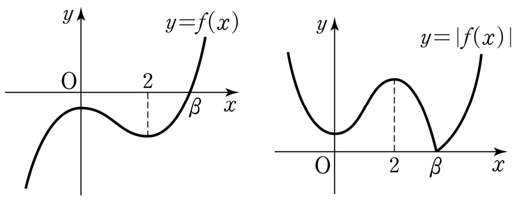
ㄴ. ① $f(0) \geq 0,\ f(2) \geq 0$일 때



따라서 $|f(x)|$는 $x=\alpha$와 $x=2$에서 극소이다.

따라서 a의 개수는 2이다.

② $f(0) \leq 0,\ f(2) \leq 0$일 때

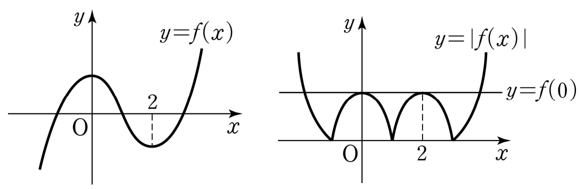


따라서 $|f(x)|$는 $x=0$과 $x=\beta$에서 극소이다.

따라서 a의 개수는 2이다.

따라서 ①, ②의 모든 경우 a의 개수는 2개 (참)

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이므로 $f(0)>0,\ f(2)<0$



따라서 $|f(x)|=f(0)$의 교점은 4개이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

4 정답 80

출제의도 : 이항분포의 분산과 확률변수의 성질을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X의 분산은

$V(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$

$V\left(\frac{1}{2}X+1\right)=\frac{1}{4}V(X)=5$이므로

$V(X)=4\times5=20$

$\frac{n}{4}=20$이므로

$n=80$

5 [정답] ①

[출제의도] 이항분포에서의 확률과 조건부확률을 이해한다.

추가된 부품 중 S의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{P}(x=0)={}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(x=1)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(x=2)={}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}$

7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T인 사건을 A라 하고 추가된 부품이 모두 S인 사건을 B라 하면 구하고자 하는 확률을

$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}}{\frac{1}{4}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}}=\frac{1}{6}$$

6 정답: ⑤

주사위를 10번 던졌을 때 2000이 적힌 면이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 $X=2000Y+1000$이다. 주사위를 한번 던졌을 때 2000이 적힌 면이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{2}{3}\right)$을 따른다. 이때

$\mathrm{E}(Y)=10\times\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$

$\mathrm{V}(Y)=10\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{20}{9}$

따라서

$\mathrm{V}\left(\frac{3}{100}X\right)=\mathrm{V}(60Y+30)=3600\mathrm{V}(Y)=8000$

$\mathrm{E}(3X)=\mathrm{E}(6000Y+3000)=6000\mathrm{E}(Y)+3000=43000$

이므로

$\mathrm{V}\left(\frac{3}{100}X\right)+\mathrm{E}(3X)=8000+43000=51000$

7 정답 12

출제의도 : 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

출발한 후 두 점 P , Q의 속도가 같아지는 순간

$v_1(t)=v_2(t)$

이므로

$3t^2+t=2t^2+3t$

$t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

$t=2$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 v_1(t)dt=\int_0^2(3t^2+t)dt=\left[t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=10$$

$t=2$일 때 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^2 v_2(t)dt=\int_0^2(2t^2+3t)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^2=\frac{16}{3}+6=\frac{34}{3}$$

따라서 두 점 사이의 거리 a는

$a=\left|\frac{34}{3}-10\right|=\frac{4}{3}$

이므로

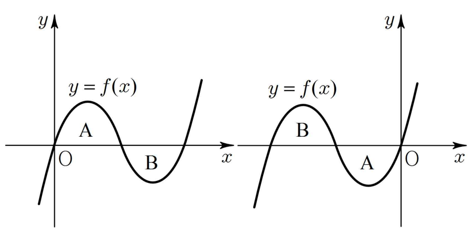
$9a=9\times\frac{4}{3}=12$

8 [정답] ④

유 형 적분법 통합 문제

해 설

ㄱ. 조건 (가), (나)를 만족하는 삼차함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음의 <그림 1>과 <그림 2>와 같이 원점을 지나는 두 가지 경우이다.



<그림 1> <그림 2>

$y=f(x)$ 그래프와 x축 사이의 두 부분의 넓이를 위 그림과 같이 각각 A, B라 할 때 A$\geq$B를 만족한다.

따라서 $f'(0)>0$이다. (참)

ㄴ. <그림 2>의 경우 방정식 $f(x)=0$은 양이 아닌 서로 다른 세 실근을 갖는다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과

$x=0,\ a,\ 4$에서 만난다고 하면

$f(x)=x(x-a)(x-4)$라 할 수 있다.

$$g(4)=\int_0^4 t(t-a)(t-4)\,dt$$
$$=\int_0^4 \{t^3-(a+4)t^2+4at\}dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}(a+4)t^3+2at^2\right]_0^4=0$$
$$4-\frac{4}{3}(a+4)+2a=0$$
$$\therefore a=2$$

따라서 $f(x)=x(x-2)(x-4)$ 이고
$f(4-x)=(4-x)(2-x)(-x)=-f(x)$ 이므로
$f(x)+f(4-x)=0$ 이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

9 [정답] ②
[출제의도] 다항함수의 미분법과 적분법을 이용하여 함수의 최댓값을 구하는 문제를 해결한다.

$g(a)=\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$라 하자.

$$g(a)=\int_{-a}^{0}(2x+2)\,dx+\int_0^a\left(-x^2+2x+2\right)dx$$
$$=-a^2+2a-\frac{1}{3}a^3+a^2+2a$$
$$=-\frac{1}{3}a^3+4a$$

$g'(a)=-a^2+4=-(a+2)(a-2)$
$g(a)$ 의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$		↗	$\frac{16}{3}$	↘

$g(a)$ 는 $a=2$ 에서 최댓값 $\frac{16}{3}$

10 정답 8
출제의도 : 수열의 합의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?
정답풀이 :
점 A_0에서 점 A_n까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리는

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=\frac{1}{25}\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}$$
$$=\frac{n^2}{25}=\left(\frac{n}{5}\right)^2$$

점 A_n이 직선 $y=x$ 위에 있기 위해서는 점 A_0에서 점 A_n까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리가 짝수이어야 한다.

$\left(\frac{n}{5}\right)^2$이 짝수이면 $\frac{n}{5}$도 짝수이므로 $\frac{n}{5}=2m$ (단, m은 자연수)
에서 $n=10m$ 이다.
따라서 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 두 번째 점은 $m=2$, 즉 $n=20$일 때이므로 점 A_{20}이다.
경로를 따라 이동한 거리가 $2k$(k는 자연수)일 때 점 P의 x좌표는 k이다.
점 A_0에서 점 A_{20}까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리가 $\left(\frac{20}{5}\right)^2=4^2=16$이므로 점 A_{20}의 x좌표는 8이다. 즉,
$a=8$

11 [정답] 120
[출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

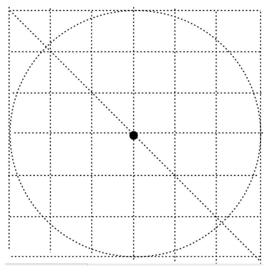
$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a_k=n(n+1)(4n-1)=S_n$이라 하면
수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여 $n\geq 2$일 때

$$(2n-1)a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n(n+1)(4n-1)-(n-1)n(4n-5)=n(12n-6)$$
$$=6n(2n-1)$$

$a_n=6n\,(n\geq 2)$, $a_1=S_1=6$
$\therefore\ a_n=6n\,(n\geq 1)$
따라서 $a_{20}=120$

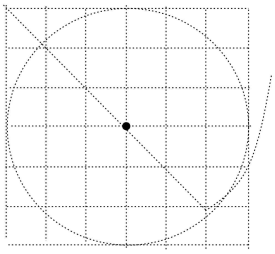
12 정답 ④
출제의도 : 조건을 만족시키는 점의 개수의 합을 구할 수 있는가?
정답풀이 :
각 경우로 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) $n\leq 7$일 때,
대칭성을 이용하여 조사하면 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분에 있는 점의 개수와 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 윗부분에 있는 점의 개수가 같으므로
$A_n-B_n=0$

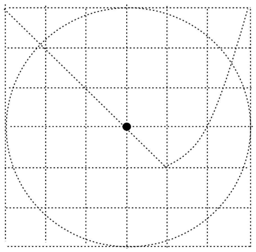


(ⅱ) $n\leq 8$일 때,
아래 그림에서 대칭성을 이용하여 조사하면

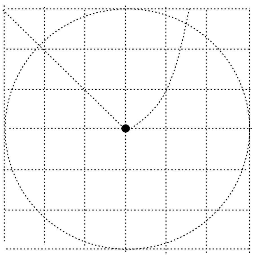
$A_8 - B_8 = 0$



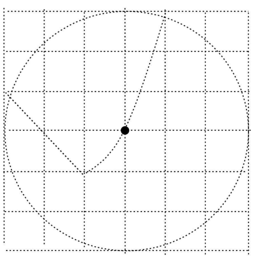
(ⅲ) $n=9$일 때,
아래 그림에서
$A_9 - B_9 = 12 - 8 = 4$



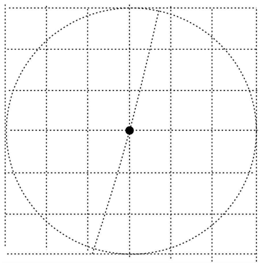
(ⅳ) $n=10$일 때,
아래 그림에서
$A_{10} - B_{10} = 17 - 4 = 13$



(ⅳ) $n=11$일 때,
아래 그림에서
$A_{11} - B_{11} = 15 - 7 = 8$

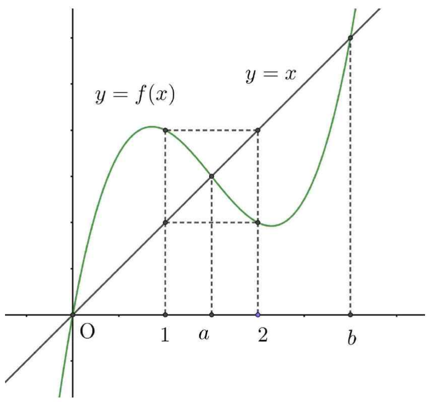


(ⅴ) $12 \le n \le 20$일 때,
대칭성을 이용하여 조사하면 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분에 있는 점의 개수와 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 윗부분에 있는 점의 개수가 같으므로
$A_n - B_n = 0$



따라서, 구하는 값은
$\sum_{n=1}^{20} (A_n - B_n) = 4 + 13 + 8 = 25$

13 정답 40
출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수를 구할 수 있는가?
정답풀이 :
$x=\alpha$가 방정식 $(f \circ f)(x) = x$, 즉 $f(f(x)) = x$의 한 실근이라고 하면 다음과 같은 두 가지 경우 중의 하나이다.
(ⅰ) $f(\alpha) = \alpha$일 때
α는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표이다.
(ⅱ) $f(\alpha) = \beta$이고 $f(\beta) = \alpha$일 때
(단, $\alpha \ne \beta$)
곡선 $y=f(x)$는 두 점 (α, β), (β, α)를 지나고, 이 두 점을 모두 지나는 직선의 기울기는
$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha} = -1$
이다.
따라서 (ⅰ) 또는 (ⅱ)와 주어진 조건
$f'(1) < 0$, $f'(2) < 0$ 및 $0 < 1 < a < 2 < b$를 모두 만족시키고 α의 개수가 5가 되도록 하는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같은 경우뿐이다.



즉, 방정식 $f(x) = x$를 만족시키는 실수는 0, a, b의 3개이고,
$f(1) = 2$, $f(2) = 1$이어야 한다.
따라서 삼차방정식 $f(x) - x = 0$의 해는 0, a, b이므로
$f(x) - x = kx(x-a)(x-b)$ (k는 양의 상수)로 놓을 수 있다.
$f(1) = 2$에서

$2-1=k(a-1)(b-1)$

$ab-(a+b)=\dfrac{1}{k}-1$ ⋯ ㉠

$f(2)=1$에서

$1-2=2k(a-2)(b-2)$

$ab-2(a+b)=-\dfrac{1}{2k}-4$ ⋯ ㉡

한편,

$f(x)=k\{x^3-(a+b)x^2+abx\}+x$

이므로

$f'(x)=k\{3x^2-2(a+b)x+ab\}+1$

따라서 $f'(0)-f'(1)=6$에서

$abk+1-k\{3-2(a+b)+ab\}-1=6$

$-3k+2k(a+b)=6$

$a+b=\dfrac{3}{k}+\dfrac{3}{2}$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$ab=\dfrac{4}{k}+\dfrac{1}{2}$ 이고 $ab=\dfrac{11}{2k}-1$이므로

$\dfrac{4}{k}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2k}-1$에서

$\dfrac{3}{2k}=\dfrac{3}{2}$

따라서 $k=1$이므로

$a+b=\dfrac{9}{2}$, $ab=\dfrac{9}{2}$

이때

$f(x)=kx(x-a)(x-b)+x$

$\quad=x^3-(a+b)x^2+(ab+1)x$

이므로

$f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{11}{2}x$

따라서

$f(5)=5\left(5^2-\dfrac{9}{2}\times5+\dfrac{11}{2}\right)$

$\quad=5\left(25-\dfrac{45}{2}+\dfrac{11}{2}\right)$

$\quad=5(25-17)=40$

14 [정답] 64

[출제의도] 도형의 평행이동과 함수의 미분가능성을 이해하여 주어진 문제를 해결한다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이면

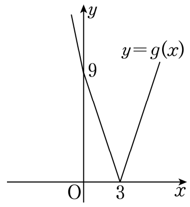
$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=9$, $\lim\limits_{x\to0-}g(x)=\dfrac{3}{2}|3k-9|$ 이므로

$9=\dfrac{3}{2}|3k-9|$

$|k-3|=2$

$k=1$ 또는 $k=5$

(ⅰ) $k=1$인 경우



함수 $g(x)h(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to3+}\dfrac{g(x)h(x)-g(3)h(3)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3+}\dfrac{(3x-9)h(x)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3+}3h(x)=3h(3)$

$\lim\limits_{x\to3-}\dfrac{g(x)h(x)-g(3)h(3)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3-}\dfrac{(9-3x)h(x)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3-}\{-3h(x)\}=-3h(3)$

$3h(3)=-3h(3)$ 이므로

$h(3)=0$ …… ㉠

함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{(9-3x)h(x)-9h(0)}{x}=9h'(0)-3h(0)$

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{\frac{3}{2}(6-3x)h(x)-9h(0)}{x}$

$=9h'(0)-\dfrac{9}{2}h(0)$

$9h'(0)-3h(0)=9h'(0)-\dfrac{9}{2}h(0)$, $h(0)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $h(x)=x(x-3)(x+\alpha)$

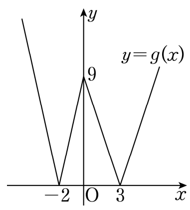
(단, α는 상수)이고, 조건 (나)에 의해

$h'(3)=27+6(\alpha-3)-3\alpha=15$, $3\alpha=6$, $\alpha=2$

$h(x)=x(x-3)(x+2)=x^3-x^2-6x$

그러므로 $k=1$일 때 $h(1)=-6$

(ⅱ) $k=5$인 경우



(ⅰ)과 같은 방법으로

$h(3)=h(0)=h(-2)=0$이고

$h(x)=x^3-x^2-6x$

그러므로 $k=5$일 때 $h(5)=70$

(ⅲ) $k\neq1$, $k\neq5$인 경우

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니고

함수 $g(x)h(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0-} g(x)h(x)=g(0)h(0)$

$\frac{3}{2}|3k-9|\times h(0)=9h(0)$

$h(0)=0$ …… ㉢

함수 $g(x)h(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to0-}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}=\frac{3}{2}|3k-9|\times h'(0)$

$\lim\limits_{x\to0+}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}=9h'(0)$

$\frac{3}{2}|3k-9|\times h'(0)=9h'(0)$이므로 $h'(0)=0$ …… ㉣

함수 $g(x)h(x)$ 가 $x=3$ 에서 미분가능하므로

㉠과 같은 방법으로 $h(3)=0$ …… ㉤

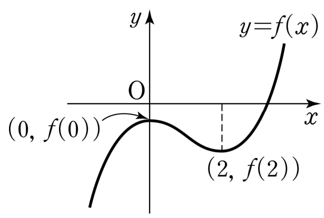
㉢, ㉣, ㉤에 의하여 $h(x)$ 는 x^2과 $x-3$ 을 인수로 가지므로 $h(x)=x^2(x-3)$, $h'(3)=9$

조건 (나)를 만족시키지 않으므로 $h(x)$ 는 존재하지 않는다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 모든 $h(k)$ 의 값의 합은 $(-6)+70=64$

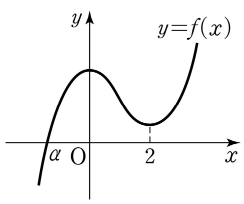
15 [정답] ⑤

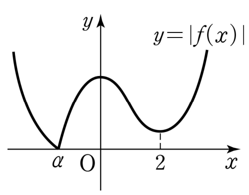
ㄱ. $f(0)<0$이면



$\therefore\ |f(0)|<|f(2)|$ (참)

ㄴ. ① $f(0)\ge0,\ f(2)\ge0$일 때

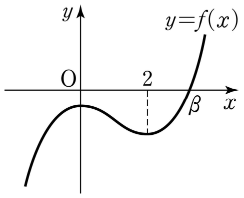


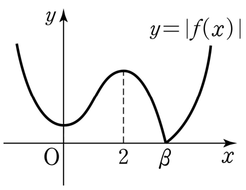


따라서 $|f(x)|$는 $x=\alpha$와 $x=2$에서 극소이다.

따라서 a의 개수는 2이다.

② $f(0)\le0,\ f(2)\le0$일 때



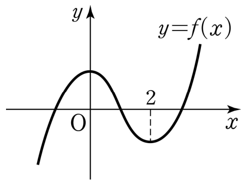


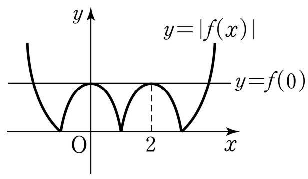
따라서 $|f(x)|$는 $x=0$과 $x=\beta$에서 극소이다.

따라서 a의 개수는 2이다.

따라서 ①, ②의 모든 경우 a의 개수는 2개 (참)

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이므로 $f(0)>0,\ f(2)<0$





따라서 $|f(x)|=f(0)$의 교점은 4개이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.