이지수능교육

응답하라, 나의 꿈! 431프로젝트

고3 2018년 09월 수학가형
최고난도 및 유형

이지오답핏

www.i-ez.net | 02-571-8170

응답하라, 나의 수능 - 나를 알아주는 최적의 학습 시스템

▮ 문항별 분석

번호	대분류	중분류	소분류	배점	정답률
01	평면벡터	평면벡터의 성분과 내적	평면도형에서의 벡터의 연산	2	94%
02	지수함수와 로그함수	지수함수의 극한	함수의 극한값: 밑이 e인 지...	2	96%
03	공간도형과 공간벡터	공간좌표	선분의 분점	2	95%
04	확률	확률의 덧셈정리	여사건의 확률	3	93%
05	평면곡선	이차곡선	포물선의 정의	3	95%
06	미분법	여러 가지 미분법	역함수의 미분법	3	92%
07	지수함수와 로그함수	지수함수의 뜻과 그래프	지수함수의 평행, 대칭이동	3	93%
08	순열과 조합	이항정리	이항정리, 다항정리	3	76%
09	적분법	정적분의 활용	넓이의 계산: 초월함수	3	89%
10	평면벡터	평면운동	평면 위의 운동: 초월함수	3	90%
11	미분법	여러 가지 미분법	음함수의 미분법	3	91%
12	공간도형과 공간벡터	공간도형	삼수선의 정리	3	92%
13	통계	통계적 추정	모평균과 표본평균	3	85%
14	삼각함수	삼각함수의 뜻과 그래프	삼각방정식	4	64%
15	확률	조건부확률	독립시행의 확률	4	87%
16	평면벡터	평면벡터의 성분과 내적	벡터의 내적	4	75%
17	통계	통계적 추정	모평균의 추정	4	78%
18	순열과 조합	분할	분할	4	75%
19	삼각함수	삼각함수의 극한	도형, 그래프와 함수의 극한:...	4	75%
20	미분법	도함수의 활용	그래프 활용 (합답형, 미분 ...	4	45%
21	적분법	여러 가지 적분법	구간에 따라 정의된 함수의 정...	4	21%
22	순열과 조합	순열과 조합	순열과 조합 통합	3	93%
23	지수함수와 로그함수	로그함수의 뜻과 그래프	로그방정식: 기본	3	94%
24	통계	확률분포	이항분포	3	82%
25	적분법	여러 가지 적분법	치환적분법	3	74%
26	미분법	여러 가지 미분법	합성함수의 미분법	4	83%
27	평면곡선	이차곡선	타원의 정의	4	81%
28	순열과 조합	순열과 조합	중복조합	4	62%
29	공간도형과 공간벡터	공간벡터	공간도형에서의 벡터의 연산	4	24%
30	미분법	여러 가지 미분법	합성함수의 미분법	4	12%

킬/러/문/항/

고3 2018년 09월 평가원 수학가형 20번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 미분법 | 도함수의 활용 | 그래프 활용 (합답형, 미분 가능성)

001 열린 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos x+2x\sin x$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가진다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha<\beta$) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\tan(\alpha+\pi)=-2\alpha$

ㄴ. $g(x)=\tan x$라 할 때, $g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$이다.

ㄷ. $\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}<\sec^2\alpha$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유사문제

§ 출전 : 고3 2011년 06월 평가원 수학가형 21번

002 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $f(x)=\frac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)$에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 점 $(2,\ 2)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다. ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다. ㄷ. 함수 $\lvert f(x)-g(x)\rvert$는 $x=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

§ 출전 : 2014년 E변형특강 수학B형 136번

003 함수 $f(x)=\frac{1}{8}cos2x-\frac{3}{4}x^2+x$에 대하여 옳은 것만을 |보기|에서 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$ ㄴ.$a<b$이면$f'(a)<f'(b)$이다. ㄷ. 열린 구간$(0,\ \pi)$에서 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

킬/러/문/항/

고3 2018년 09월 평가원 수학가형 21번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 적분법 | 여러 가지 적분법 | 구간에 따라 정의된 함수의 정적분: 초월함수

004 0이 아닌 세 정수 $l,\ m,\ n$이

$$|l|+|m|+|n| \le 10$$

을 만족시킨다. $0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0,\ f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$이고

$$f'(x)=\begin{cases} l\cos x & \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \\ m\cos x & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right) \\ n\cos x & \left(\pi<x<\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$의 값이 최대가 되도록 하는 $l,\ m,\ n$에 대하여 $l+2m+3n$의 값은? [4점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

유사문제

§ 출전 : 고3 2015년 06월 평가원 수학B형 30번

005 정의역이 $\{x|0 \le x \le 8\}$이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은 $p+\frac{q}{\ln 2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

(가) $f(0)=1$이고 $f(8) \le 100$이다.
(나) $0 \le k \le 7$인 각각의 정수 k에 대하여

$$f(k+t)=f(k) \quad (0<t \le 1)$$

또는

$$f(k+t)=2^t \times f(k) \quad (0<t \le 1)$$

이다.
(다) 열린 구간 $(0,\ 8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

§ 출전 : 고3 2017년 06월 평가원 수학가형 30번

006 실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ $(c>0$인 상수$)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)이다. $a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx = k\alpha_m \int_0^1 |f(x)|dx$

$mk \times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

킬/러/문/항/

고3 2018년 09월 평가원 수학가형 28번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 순열과 조합 | 순열과 조합 | 중복조합

007 방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가

$$a<2 \text{ 또는 } b<2$$

를 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

유사문제

§ 출전 : 고3 2017년 수능 수학가형 28번

008 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$가 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 걺 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

§ 출전 : 고3 2017년 07월 학력평가 수학나형 28번

009 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수의 개수를 구하시오.

[4점]

(가) 네 자리의 홀수이다.
(나) 각 자리의 수의 합이 8보다 작다.

킬/러/문/항/

고3 2018년 09월 평가원 수학가형 29번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 공간도형과 공간벡터 | 공간벡터 | 공간도형에서의 벡터의 연산

010 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}\left(3,\ \frac{1}{2},\ 2\right)$와 평면 $z=1$ 위의 세 점 P_1, P_2, P_3이

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=\frac{11}{3},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}=-\frac{7}{4}$$

을 만족시킨다. 점 $(0,\ k,\ 0)$을 지나고 방향벡터가 $(1,\ -6,\ 0)$인 직선을 l이라 하고, 직선 l에 의해 나누어지는 xy평면의 두 영역을 각각 α, β라 하자.
세 점 P_1, P_2, P_3에서 xy평면에 내린 수선의 발이 모두 α에만 포함되거나 모두 β에만 포함되도록 하는 양의 정수 k의 최솟값을 m, 음의 정수 k의 최댓값을 M이라 할 때, $m-M$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

유사문제

§ 출전 : 고3 2017년 09월 평가원 수학가형 29번

011 좌표공간에 세 점 O$(0,\ 0,\ 0)$, A$(1,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 0,\ 2)$가 있다. 점 P가 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\le 4$를 만족시키며 움직일 때,

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=1,\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$$

을 만족시키는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M+m=a+b\sqrt{5}$일 때, $6(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

§ 출전 : 2016년 E변형완성 수학가형 PART02 64번

012 좌표공간에 두 직선

$l_1 : x-1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{2}$, $l_2 : \dfrac{x+1}{2}=3-z,\ y=1$

이 있다. 직선 l_1 위의 임의의 점 A에서 직선 l_2에 내린 수선의 발을 B, 점 B에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 C라 하자. $81\,\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 값은?

① 41 ② 42 ③ 43 ④ 44 ⑤ 45

킬/러/문/항/

고3 2018년 09월 평가원 수학가형 30번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 미분법 | 여러 가지 미분법 | 합성함수의 미분법

013 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다. (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다. (다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$) [4점]

§ 출전 : 고3 2018년 03월 학력평가 수학가형 21번

014 함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^x$과 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=e$, $f'(1)=e$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(f(x))=f'(x)$이다.

함수 $h(x)=f^{-1}(x)g(x)$에 대하여 $h'(e)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

§ 출전 : 고3 2017년 07월 학력평가 수학가형 30번

015 상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수인 이차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $g(x)$가 일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $4\sqrt{e}$이다.
(다) 방정식 $g(x)=4\sqrt{e}$의 근은 모두 유리수이다.

$|f(-1)|$의 값을 구하시오. [4점]

정답과 해설

응답하라. 나의 수능 – 나를 알아주는 최적의 학습 시스템

1 정답 ③

출제의도 : 미분을 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

함수 $f(x)=\cos x+2x\sin x$에서

$f'(x)=-\sin x+2\sin x+2x\cos x$

$\quad =\sin x+2x\cos x$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha)=0$에서

$\sin\alpha+2\alpha\cos\alpha=0$

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\alpha$

$\tan\alpha=-2\alpha$

따라서

$\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha=-2\alpha$ (참)

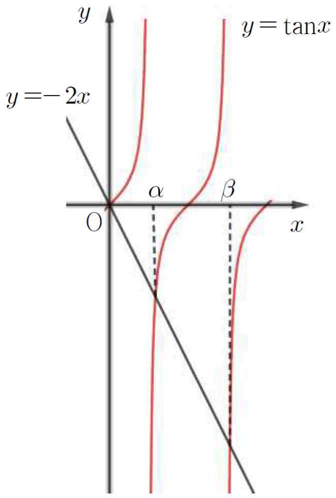
ㄴ.

$f'(x)=0$에서

$\tan x=-2x$

이때, $f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$이므로

열린 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-2x$가 만나는 점의 x좌표가 $x=\alpha$, $x=\beta$이다.



이때, $\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha$이므로

$\tan'(\alpha+\pi)=\tan'\alpha$

한편, $\alpha<\beta$이고, 함수 $y=\tan x$는 열린 구간 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 증가하므로

$\tan'(\alpha+\pi)<\tan'\beta$

따라서 $g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$ (참)

ㄷ.

함수 $f(x)$가 $x=\beta$에서 극값을 가지므로

$f'(\beta)=0$에서

$\sin\beta+2\beta\cos\beta=0$

$\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=-2\beta$

$\tan\beta=-2\beta$

이때, $\tan(\beta-\pi)=-2\beta$이므로

$\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}=\dfrac{-2\alpha-(-2\beta)}{\alpha-(\beta-\pi)}>\sec^2\alpha$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

2 [정답] ⑤

[출제의도] 미분계수의 정의와 도함수의 활용을 이해한다.

ㄱ. $f(x)=\dfrac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)$에서

$f'(x)=\dfrac{1}{27}(4x^3-18x^2+24x+19)$

$f''(x)=\dfrac{1}{27}(12x^2-36x+24)=\dfrac{4}{9}(x-1)(x-2)$

따라서 $f''(2)=0$이고 좌우에서 부호가 바뀌므로 점 $(2,\ 2)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 다. (참)

ㄴ. $f(x)=x$에서 $\dfrac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)=x$

$x^4-6x^3+12x^2+19x=27x$, $x(x-2)^3=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

따라서 방정식 $f(x)=x$의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다. (참)

ㄷ. $f(2)=2$, $f'(2)=1$이므로 $g'(2)=\dfrac{1}{f'(2)}=1$

$0<x<2$에서 $f(x)<x$이므로 $f(x)<g(x)$

$x\ge 2$에서 $f(x)>x$이므로 $f(x)\ge g(x)$

$F(x)=|f(x)-g(x)|$라 하면

$x<2$에서 $F(x)=g(x)-f(x)$

$x\ge 2$에서 $F(x)=f(x)-g(x)$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=1$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}=1$이므로

$F'(2)=\lim\limits_{h\to -0}\dfrac{F(2+h)-F(2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to -0}\left(\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}-\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}\right)=0$

같은 방법으로 $\lim\limits_{h\to +0}\dfrac{F(2+h)-F(2)}{h}=0$

따라서 $F(x)$, 즉 $|f(x)-g(x)|$는 $x=2$에서 미분가능하다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

3 [정답] ④

$f(x)=\dfrac{1}{8}\cos 2x-\dfrac{3}{4}x^2+x$에서

$f'(x)=-\dfrac{1}{4}\sin 2x-\dfrac{3}{2}x+1$, $f''(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{3}{2}$

ㄱ .

$f'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=-\dfrac{1}{4}\sin 2x-\dfrac{3}{2}x+1$, $f''(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{7-\pi}{8}>0$ (참)

ㄴ. $f''(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{3}{2}$에서 $-1\le\cos 2x\le 1$이므로

$-2 < f''(x) \leq -1$

즉, 모든 실수 x에 대하여 함수 $f'(x)$는 감소함수이다.

따라서 $a < b$이면 $f'(a) > f'(b)$이다. (거짓)

ㄷ. $f'(0) = 1 > 0$, $f'(\pi) = -\frac{3}{2}\pi + 1 < 0$이고 함수 $f'(x)$가 닫힌 구간 $[0, \pi]$에서 연속이므로 중간값의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$인 실수 $c(0 < c < \pi)$가 존재한다.

이때, ㉠에 의해 $f''(c) = -\frac{1}{2}cos2c - \frac{3}{2} < 0$

따라서 열린 구간 $(0, \pi)$에서 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

4 정답 ⑤

출제의도 : 연속함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 정수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$에서 $f(0) = 0$이므로

$f(x) = l\sin x$

$\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$에서 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1$이므로

$f(x) = n\sin x + n + 1$

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$에서 $f(x) = m\sin x + C$ (C는 적분상수)

함수 $f(x)$가 $x = \pi$에서 연속이므로

$C = n + 1$

또, 함수 $f(x)$가 $x = \frac{\pi}{2}$에서 연속이므로

$l = m + n + 1$ …… ㉠

이때,

$$f(x) = \begin{cases} l\sin x & \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ m\sin x + n + 1 & \left(\frac{\pi}{2} < x \leq \pi\right) \\ n\sin x + n + 1 & \left(\pi < x \leq \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

이므로

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$$

$$= [-l\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-m\cos x + (n+1)x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + [-n\cos x + (n+1)x]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$= l + m + (\pi - 1)n + \pi$$

㉠에서 $l = m + n + 1$이므로

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx = 2m + (n+1)\pi + 1$$
$$= 2m + n\pi + \pi + 1$$

이 값이 최대이어야 하므로 $m > 0$, $n > 0$이어야 한다.

한편, $|l| + |m| + |n| \leq 10$에서

$l = m + n + 1$이므로

$|m + n + 1| + |m| + |n| \leq 10$

$(m + n + 1) + m + n \leq 10$

$2m + 2n + 1 \leq 10$에서 $m + n \leq \frac{9}{2}$

(ⅰ) $m = 1$, $n = 3$일 때,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx = 4\pi + 3$$

(ⅱ) $m = 2$, $n = 2$일 때,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx = 3\pi + 5$$

(ⅲ) $m = 3$, $n = 1$일 때,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx = 2\pi + 7$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$의 값이 최대인 경우는

$m = 1$, $n = 3$일 때이고,

㉠에서 $l = 1 + 3 + 1 = 5$이다.

따라서

$l + 2m + 3n = 5 + 2 + 9 = 16$

5 정답 128

출제의도 : 정적분의 값이 최대가 될 조건을 구하고 그 때의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \leq k \leq 7$인 각각의 정수 k에 대하여

$f(k + t) = f(k)$ $(0 < t \leq 1)$

을 만족시키는 함수

$y = f(x)$ $(k < x \leq k + 1)$

의 그래프는 x축과 평행하다.

또한, $0 \leq k \leq 7$인 각각의 정수 k를 m이라 하면

$f(m + t) = 2^t \times f(m)$ $(0 < t \leq 1)$

이므로

$$f(m + 1 + t) = 2^t \times f(m + 1)$$
$$= 2^t \times 2 \times f(m)$$
$$= 2^{t+1} \times f(m)$$

따라서, $0 \leq k \leq 7$인 각각의 정수 k에 대하여

$f(k + t) = 2^t \times f(k)$ $(0 < t \leq 1)$

를 만족시키는 함수 $y = f(x)$ $(k < x \leq k + 1)$의 그래프는 지수의 밑이 2인 지수함수의 그래프이다.

그리고, $f(8) \leq 100$이므로

$2^6 = 64$, $2^7 = 128$

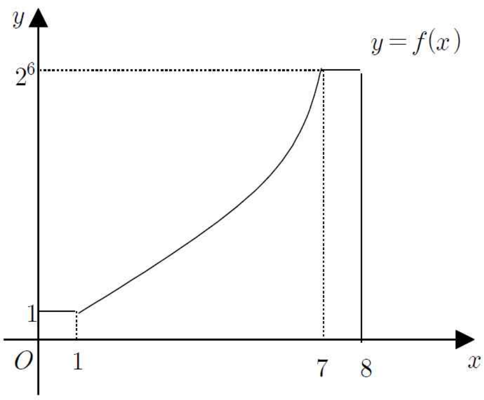
에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 64이어야 한다.

따라서, 연속함수 $f(x)$에 대하여

$\int_0^8 f(x)dx$가 최댓값을 가지면서 열린구간 $(0,\ 8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2가 되어야 하므로

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (0 \le x \le 1) \\ 2^{x-1} & (1 \le x \le 7) \\ 64 & (7 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



따라서, $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은

$1\times 1+\int_1^7 2^{x-1}dx+1\times 2^6$

$=65+\frac{1}{2}\int_1^7 2^x dx$

$=65+\frac{1}{2}[\frac{2^x}{\ln 2}]_1^7$

$=65+\frac{1}{2}(\frac{2^7}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 2})$

$=65+\frac{63}{\ln 2}$

따라서, $p=65,\ q=63$이므로

$p+q=128$

6 정답 16

출제의도 : 함수의 성질과 함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

조건 (가)에서 $g'(1)=0$이므로

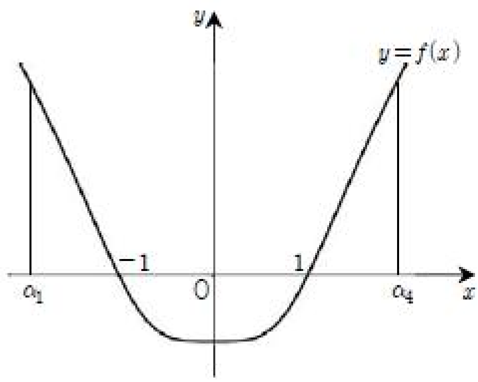
$f(1)=\ln 2-c=0$에서 $c=\ln 2$

$f(x)=\ln(x^4+1)-\ln 2$

$f'(x)=\frac{4x^3}{x^4+1}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$는 $f(-x)=f(x)$에서 극솟값 $-\ln 2$를 갖고, 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



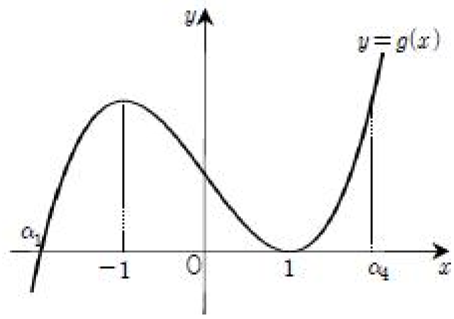
조건 (가)에서 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=\alpha_1$ $(\alpha_1<-1)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 같아지도록 α_1을 정할 수 있다.

이때, $g(x)=\int_a^x f(t)dt=0$을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 a의 값은

$\alpha_1,\ \alpha_2=-1,\ \alpha_3=1,\ \alpha_4=-\alpha_1$

이므로 $m=4$이다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



한편,

$\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^1 \{-f(x)\}dx$

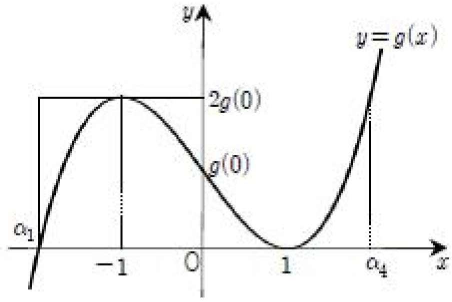
$=\int_0^1 \{-g'(x)\}dx$

$=[-g(x)]_0^1$

$=-g(1)+g(0)$

$=g(0)$

즉 $g(0)=\int_0^1 |f(x)|dx$



$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx$의 값은 위의 그림에서 직사각형의 넓이와 같으므로

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx = (0-\alpha_1)\times 2g(0)$$
$$= -2\alpha_1 \times \int_0^1 |f(x)|dx$$
$$= 2\alpha_4 \times \int_0^1 |f(x)|dx$$

이므로 조건 (나)에서 $k=2$

따라서 $c=\ln 2$, $m=4$, $k=2$이므로

$$mk\times e^c = 4\times 2\times e^{\ln 2}$$
$$= 4\times 2\times 2 = 16$$

7 정답 89

출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_9 = {}_{11}\mathrm{C}_9 = {}_{11}\mathrm{C}_2 = 55$$

이때, $a<2$ 또는 $b<2$인 사건을 A라 하면 A^C는 $a\ge 2$이고 $b\ge 2$인 사건이다.

$a=a'+2$, $b=b'+2$로 놓으면

$(a'+2)+(b'+2)+c=9$에서

$a'+b'+c=5$

방정식 $a'+b'+c=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c의 모든 순서쌍 $(a',\ b',\ c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = 21$$

이때, $\mathrm{P}(A^C) = \frac{21}{55}$이므로

$$\mathrm{P}(A) = 1-\mathrm{P}(A^C) = 1-\frac{21}{55} = \frac{34}{55}$$

따라서 $p=55$, $q=34$이므로

$p+q=55+34=89$

8 정답: 19

출제의도: 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하고 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이: 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x,\ y,\ z$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_{10} = {}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_2 = \frac{12\times 11}{2\times 1} = 66$$

이 중에서 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립하려면 x, y, z 중에서 오직 두 개만 서로 같아야 한다.

그런데, $x=y$를 만족시키는 순서쌍은

$(0,\ 0,\ 10)$, $(1,\ 1,\ 8)$, $\cdots$, $(5,\ 5,\ 0)$

의 6개이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_3\mathrm{C}_2\times 6 = 3\times 6 = 18$$

이다.

따라서 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립할 확률은

$$\frac{18}{66} = \frac{3}{11}$$

이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)\ne 0$이 성립할 확률은

$1-\frac{3}{11} = \frac{8}{11}$이다.

따라서 $p+q=11+8=19$

9 [정답] 80

[출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

조건을 만족시키는 자연수는 각 자리의 수의 합이 8보다 작은 네 자리의 홀수이므로 일의 자리의 수는 1, 3, 5이다.

이 네 자리의 자연수를

$a\times 10^3 + b\times 10^2 + c\times 10 + d\ \ (a\ne 0)$이라 하자.

(ⅰ) $d=1$인 경우

부등식 $a+b+c\le 6\ \ (a\ge 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

$a+b+c=6\ \ (a\ge 1)$일 때, ${}_3\mathrm{H}_5$

$a+b+c=5\ \ (a\ge 1)$일 때, ${}_3\mathrm{H}_4$

⋮

$a+b+c=1\ \ (a\ge 1)$일 때, ${}_3\mathrm{H}_0$

$${}_3\mathrm{H}_5 + {}_3\mathrm{H}_4 + \cdots + {}_3\mathrm{H}_0 = {}_7\mathrm{C}_5 + {}_6\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_2\mathrm{C}_0$$
$$= 56$$

(ⅱ) $d=3$인 경우

부등식 $a+b+c\le 4\ \ (a\ge 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로 (ⅰ)과 같은 방법으로

$${}_3\mathrm{H}_3 + {}_3\mathrm{H}_2 + {}_3\mathrm{H}_1 + {}_3\mathrm{H}_0 = {}_5\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_1 + {}_2\mathrm{C}_0$$
$$= 20$$

(ⅲ) $d=5$인 경우

부등식 $a+b+c\le 2\ \ (a\ge 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로 (ⅰ)과 같은 방법으로

$${}_3\mathrm{H}_1 + {}_3\mathrm{H}_0 = {}_3\mathrm{C}_1 + {}_2\mathrm{C}_0 = 4$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 80

(다른 풀이)

(ⅰ) $d=1$인 경우

$a+b+c\le 6\ (a\ge 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$a+b+c+e=6\ (a\ge 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, e의 순서쌍 (a, b, c, e)의 개수와 같다.

그러므로 ${}_4\mathrm{H}_5 = {}_8\mathrm{C}_5 = 56$

(ⅱ) $d=3$인 경우

$a+b+c\le 4\ (a\ge 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a,

b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$a+b+c+e=4$ $(a \geq 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, e의 순서쌍 (a, b, c, e)의 개수와 같다.
그러므로 ${}_4\mathrm{H}_3 = {}_6\mathrm{C}_3 = 20$
(ⅲ) $d=5$인 경우
$a+b+c \leq 2$ $(a \geq 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$a+b+c+e=2$ $(a \geq 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, e의 순서쌍 (a, b, c, e)의 개수와 같다.
그러므로 ${}_4\mathrm{H}_1 = {}_4\mathrm{C}_1 = 4$
따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 80

10 정답 12
출제의도 : 공간벡터의 내적과 직선의 방향벡터를 활용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있는가?
정답풀이 :
세 점 P_1, P_2, P_3의 좌표를
$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1,\ 1)$, $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2,\ 1)$, $\mathrm{P}_3(x_3,\ y_3,\ 1)$이라 하자.
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = 3x_1 + \frac{1}{2}y_1 + 2 = \frac{11}{3}$에서

$3x_1 + \frac{1}{2}y_1 = \frac{5}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP_2}} = 3x_2 + \frac{1}{2}y_2 + 2 = 1$에서

$3x_2 + \frac{1}{2}y_2 = -1$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP_3}} = 3x_3 + \frac{1}{2}y_3 + 2 = -\frac{7}{4}$에서

$3x_3 + \frac{1}{2}y_3 = -\frac{15}{4}$

세 점 P_1, P_2, P_3에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 Q_1, Q_2, Q_3이라 하면
세 점 Q_1, Q_2, Q_3은 각각 xy평면 위의
세 직선 $3x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{3}$, $3x + \frac{1}{2}y = -1$, $3x + \frac{1}{2}y = -\frac{15}{4}$
즉, $y = -6x + \frac{10}{3}$, $y = -6x - 2$, $y = -6x - \frac{30}{4}$ 위에 있다.
한편 점 $(0,\ k,\ 0)$을 지나고 방향벡터가 $(1,\ -6,\ 0)$인 직선의 방정식은

$\frac{x}{1} = \frac{y-k}{-6}$, $z=0$

이다. 즉,
xy평면 위의 직선 $y = -6x + k$이므로
주어진 조건을 만족하려면

$k < -\frac{30}{4}$ 또는 $k > \frac{10}{3}$

이어야 한다,
따라서 $m=4$, $M=-8$이므로
$m - M = 4 - (-8) = 12$

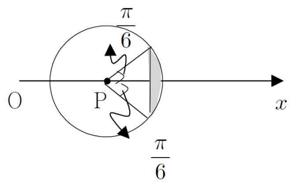
11 [정답]
정답 27
출제의도 : 공간벡터의 크기와 내적을 이해하고 이를 활용할 수 있는가?
정답풀이 :
점 P가 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \leq 4$를 만족시키므로 점 P는 xy평면 위에 있으며 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 원의 경계 및 내부이다.
또, 점 Q가 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 1$이고,
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

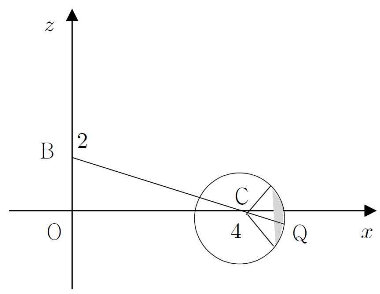
$\cos\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$

그러므로 점 Q는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구 위에 있으며 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$가 이루는 각의 크기 θ가 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$를 만족시키는 점으로 그림과 같다.



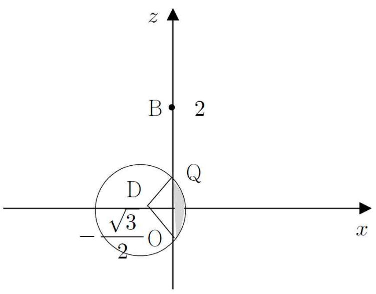
이때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$의 크기가 최대이려면 점 P가 $\mathrm{C}(4,\ 0,\ 0)$일 때이고 다음 그림과 같이 두 점 B, C를 지나는 직선이 중심이 C이고 반지름의 길이가 1인 구와 만나는 점일 때이다.



그러므로 $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최댓값은

$$M = \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CQ}}$$
$$= \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2 + (0-2)^2} + 1$$
$$= 2\sqrt{5} + 1$$

또, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$의 크기가 최소이려면 그림과 같이 점 P가 $\mathrm{D}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ 0\right)$일 때이고 점 Q는 중심이 D이고 반지름의 길이가 1인 구가 z축과 만나는 점일 때이다.



그러므로 $|\overrightarrow{BQ}|$의 최솟값은 $\overline{OQ}=\frac{1}{2}$이므로

$m=\overline{BQ}$

$=2-\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{2}$

따라서

$M+m=(1+2\sqrt{5})+\frac{3}{2}$

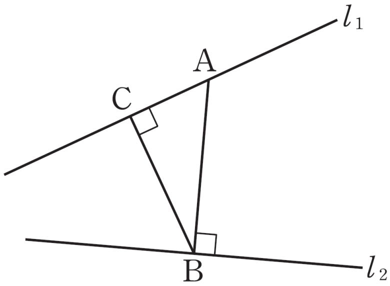
$=\frac{5}{2}+2\sqrt{5}$

이므로

$6(a+b)=6\times\left(\frac{5}{2}+2\right)$

$=27$

12 정답: ⑤



직선 l_1 위의 임의의 점 $A(t+1,\ 2t,\ 2t+2)$ (단, t는 실수)에서 직선 l_2에 내린 수선의 발을 $B(2s-1,\ 1,\ 3-s)$ (단, s는 실수)라 하자.

직선 l_1의 방향벡터 $\overrightarrow{u_1}=(1,\ 2,\ 2)$, 직선 l_2의 방향벡터 $\overrightarrow{u_2}=(2,\ 0,\ -1)$이고, $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_2}$, 즉

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_2}=(2s-t-2,\ 1-2t,\ -s-2t+1)\cdot(2,\ 0,\ -1)$

$=5s-5=0$

$\therefore\ s=1$이므로 $B(1,\ 1,\ 2)$

점 B에서 직선 l_1 에 내린 수선의 발 $C(k+1,\ 2k,\ 2k+2)$ (단, k는 실수)에 대하여 $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{u_1}$

즉, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{u_1}=(k,\ 2k-1,\ 2k)\cdot(1,\ 2,\ 2)=9k-2=0$

$\therefore\ k=\frac{2}{9}$이므로 $C\left(\frac{11}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{22}{9}\right)$

$\therefore\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\left(\frac{2}{9},\ -\frac{5}{9},\ \frac{4}{9}\right)$

$81\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=81\,|\overrightarrow{BC}|^2=45$

13 정답 30

출제의도 : 합성함수 미분법을 이용하여 내적문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

사차함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접한다.

한편, $g(x)=2x^4e^{-x}$에서

$g'(x)=8x^3e^{-x}-2x^4e^{-x}$

$=-2x^3e^{-x}(x-4)$

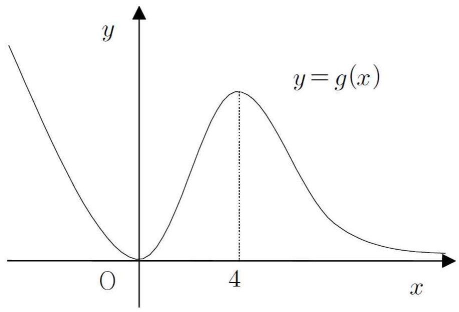
이때, $g'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=4$

그러므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	0	↗	2^9e^{-4}	↘

이때, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



한편, 조건 (가)에서 함수 $h(x)=0$은 서로 다른 4개의 실근을 가진다.

이때, $f(g(x))=0$에서 $g(x)=t$로 놓으면 주어진 방정식은 $f(t)=0$이다.

이때, 방정식 $f(t)=0$의 한 근을 $t=\alpha$라 하면

$g(x)=\alpha$

이때, $g(x)\geq 0$이므로 $\alpha\geq 0$이어야 한다. 또, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$는 많아야 세 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 방정식 $f(t)=0$은 적어도 2개의 0이상의 실근을 가져야 한다.

한편, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이고 함수 $f(x)$의 최고차

항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\ \ (0 \le \alpha \le \beta)$ …… ㉠

또, 조건 (나)에서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 $h'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀌어야 한다.

한편, $h'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$이고 $g'(x)$의 부호가 $x=0$의 좌우에서 $-$에서 $+$로 바뀌므로 $f'(g(x))$의 부호는 $x=0$의 좌우에서 $+$에서 $+$로 나타나야 한다.

한편, x의 값이 0에 아주 가까이 있을 때, $x<0$이면 $g(x)>0$이고 $x>0$이면 $g(x)>0$이다. 또, $g(0)=0$이므로 위의 조건을 만족시키기 위해서는 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0의 근처이고 양수일 때, $f'(x)>0$이어야 한다.

이때, $\alpha \ge 0$이므로 $\alpha=0$이어야 한다.

그러므로 ㉠에서

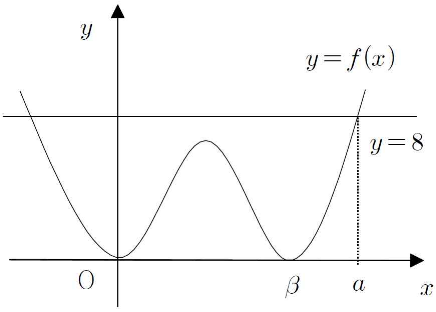
$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$ …… ㉡

또, 조건 (다)에서 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수가 6이어야 한다.

이때, $f(g(x))=8$에서 $g(x)=t$로 놓으면 $f(t)=8$이고 $g(x)\ge 0$이므로 $t \ge 0$이어야 한다.

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=8$의 그래프를 각 경우로 나누고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=8$의 교점 중 x좌표가 0보다 큰 점만 나타내면 다음과 같다.

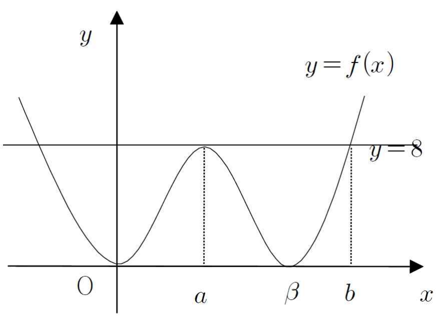
(ⅰ) 함수 $f(x)$의 극댓값이 8보다 작은 경우



두 함수 $y=f(x)$, $y=8$의 그래프의 교점의 x좌표 중 0보다 큰 값을 a라 하면 방정식 $g(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 6이어야 한다.

그런데 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=a(a>0)$인 직선은 많아야 세 점에서 만나므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) 함수 $f(x)$의 극댓값이 8인 경우



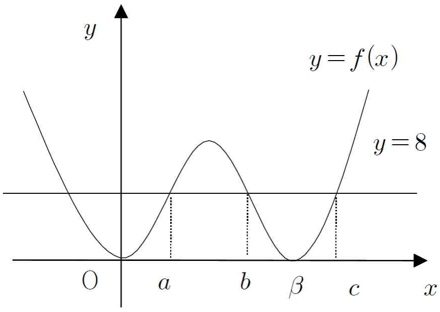
두 함수 $y=f(x)$, $y=8$의 그래프의 교점의 x좌표 중 0보다 큰 값을 a, $b(a<b)$라 하면 방정식 $g(x)=a$ 또는 $g(x)=b$의 서로 다른 실근의 개수는 6이어야 한다.

그런데 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=a(a>0)$인 직선의 교점의 개수는 2 또는 3이다.

마찬가지로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=b(b>0)$인 직선의 교점의 개수는 2 또는 3이다.

그러므로 조건을 만족시킬 수 있다.

(ⅲ) 함수 $f(x)$의 극댓값이 8보다 큰 경우



두 함수 $y=f(x)$, $y=8$의 그래프의 교점의 x좌표 중 0보다 큰 값을 a, b, $c(a<b<c)$라 하면 방정식 $g(x)=a$ 또는 $g(x)=b$ 또는 $g(x)=c$의 서로 다른 실근의 개수는 6이여야 한다.

그런데 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=a(a>0)$인 직선의 교점의 개수는 2 또는 3이다.

마찬가지로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=b(b>0)$, 함수 $y=g(x)$와 직선 $y=c(c>0)$의 교점의 개수도 모두 2 또는 3이다.

그러므로 방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 실근의 개수가 6이기 위해서는 모두 교점의 개수가 2가 되어야 한다.

그런데 $0<a<b<c$이고 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=2^9e^{-4}$만 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건을 만족시키지 못한다.

그러므로 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $f(x)$의 극댓값은 8이다.

한편, ㉡에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= x(x-\beta)^2+x^2(x-\beta) \\ &= x(x-\beta)(2x-\beta) \\ &= 2x(x-\beta)\left(x-\frac{\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

이때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	0	…	$\frac{\beta}{2}$	…	β	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

그러므로 $f\left(\frac{\beta}{2}\right)=8$에서

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{\beta}{2}\right)^2\times\left(\frac{\beta}{2}-\beta\right)^2=8$

$\beta^4=2^8$

이때, $\beta>0$이므로

$\beta=4$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2(x-4)^2$에서

$f'(x)=x(x-4)^2+x^2(x-4)$

$\quad =2x(x-2)(x-4)$

이므로

$f'(5)=2\times5\times3\times1$

$\quad =30$

14 [정답] ④

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구한다.

$f(1)=(1+a+b)e$

$\quad =e$에서

$a+b=0$ …… ㉠

$f'(x)=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$ 이므로

$f'(1)=\{1+(a+2)+a+b\}e$

$\quad =e$에서

$2a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=-2,\ b=2$

$f(x)=(x^2-2x+2)e^x$에서

$f'(x)=x^2e^x$

$f''(x)=x(x+2)e^x$이므로

$f''(1)=3e$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이므로

함수 $f(x)$는 역함수가 존재한다.

$f(1)=e$에서 $f^{-1}(e)=1$이므로

역함수의 미분법에 의하여

$(f^{-1})'(e)=\dfrac{1}{f'(1)}$

$\quad =\dfrac{1}{e}$

한편 $g(f(1))=f'(1)$, 즉 $g(e)=e$이고

$g(f(x))=f'(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=f''(x)$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(1))f'(1)=f''(1)$

$g'(e)\times e=3e$

$g'(e)=3$

따라서

$h'(e)=(f^{-1})'(e)g(e)+f^{-1}(e)g'(e)$

$\quad =\dfrac{1}{e}\times e+1\times3$

$\quad =4$

15 [정답] 71

[출제의도] 미분을 활용하여 함수 추론하기

$f(x)=a(x-m)^2+n$이라 하자.

$f'(x)=2a(x-m)$이고 $f''(x)=2a$이다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=|f'(x)|$는 각각

직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

함수 $g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$의 그래프도

직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

(ⅰ) $x>m$인 경우

$a>0$이면 함수 $y=f'(x)e^{f(x)}$는

실수 전체에서 증가하므로 함수 $g(x)$의 최댓값이

존재하지 않는다.

그러므로 조건 (나)에 의하여 $a<0$이다.

$g'(x)=-\left(f'(x)e^{f(x)}\right)'$

$g'(x)=-\left[f''(x)+\{f'(x)\}^2\right]e^{f(x)}$

$g'(x)=\left\{-4a^2(x-m)^2-2a\right\}e^{f(x)}$

방정식 $g'(x)=0$을 만족하는 x는 한 개이고

그 값을 $p\ (p>m)$이라 하자.

함수 $g(x)$는 $x=p$에서 극댓값을 갖고,

그 값이 최댓값이다.

(ⅱ) $x<m$인 경우

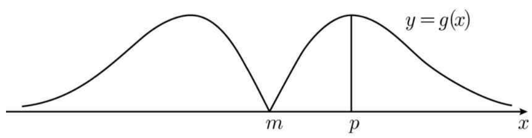
함수 $y=g(x)$의 그래프는

직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

함수 $g(x)$는 $x=2m-p$에서 극댓값을 갖고,

그 값이 최댓값이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(m)=0$이고, 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $m=2$이다.

함수 $g(x)$는 $x=p$에서 최댓값이 $4\sqrt{e}$이므로

$g(p)=|f'(p)|e^{f(p)}=4\sqrt{e}$이다.

상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수이므로

$f'(p)=2a(p-2)=-4$ …… ㉠

$f(p)=a(p-2)^2+n=\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

또한 함수 $g(x)$는 $x=p$에서 극댓값을 가지므로

$g'(p)=0$에서 $2a(p-2)^2+1=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $n=1$, $p=\dfrac{9}{4}$이므로

$a=-8$

$f(x)=a(x-m)^2+n=-8(x-2)^2+1$

따라서 $|f(-1)|=71$