빠른 정답

PART 1 수학 Ⅱ

01 집합

001 ② 002 ② 003 ④ 004 ① 005 ② 006 ③ 007 13

02 명제

008 ③ 009 8 010 ⑤ 011 4 012 35 013 ④ 014 ②

03 함수

015 ⑤ 016 ② 017 31 018 ① 019 ④ 020 ① 021 ③ 022 4

04 유리함수와 무리함수

023 ⑤ 024 ③ 025 ⑤ 026 5 027 ④ 028 ③ 029 15 030 ② 031 ④ 032 9

05 등차수열과 등비수열

033 ② 034 38 035 14 036 ① 037 ① 038 26 039 ④

06 수열의 합

040 19 041 ① 042 37 043 ② 044 ③ 045 ④ 046 ③ 047 529 048 ③ 049 990

07 수학적 귀납법

050 ③ 051 57 052 ① 053 7

08 지수

054 16 055 ④ 056 72

09 로그

057 63 058 ② 059 ④ 060 ③ 061 ① 062 ⑤

PART 2 미적분 Ⅰ

01 수열의 극한

063 ⑤ 064 ③ 065 ⑤ 066 ③ 067 ⑤ 068 ② 069 ④ 070 ②

02 급수

071 ② 072 ② 073 2 074 ⑤ 075 ① 076 ③ 077 ② 078 ⑤

03 함수의 극한

079 ④ 080 ⑤ 081 ① 082 ⑤ 083 ② 084 ③ 085 2 086 ③ 087 10 088 ④
089 ②

04 함수의 연속

090 ④ 091 5 092 ⑤ 093 6 094 20 095 ④

05 미분계수와 도함수

096 ② 097 ② 098 ③ 099 528 100 ② 101 39 102 ④ 103 ② 104 50 105 25

06 도함수의 활용

106 ⑤ 107 ① 108 ① 109 ④ 110 ③ 111 ④ 112 40 113 225 114 ⑤ 115 ①

07 부정적분과 정적분

116 ① 117 53 118 ② 119 ① 120 ③ 121 ③ 122 20 123 ④ 124 45 125 15

08 정적분의 활용

126 ③ 127 ④ 128 ③ 129 180 130 8

PART 3 확률과 통계

01 순열

131 72 132 ③ 133 ⑤ 134 50

02 조합

135 ⑤ 136 ③ 137 ③ 138 ② 139 ⑤ 140 31 141 ②

03 분할과 이항정리

142 ② 143 ③ 144 ② 145 ③ 146 780

04 확률

147 ② 148 ③ 149 ⑤ 150 ② 151 23 152 37 153 ① 154 ⑤

05 조건부확률

155 ② 156 ④ 157 ⑤ 158 ③ 159 650 160 155 161 ④ 162 ① 163 ②

06 이산확률변수의 확률분포

164 ③ 165 ② 166 ② 167 21 168 36 169 ②

07 연속확률변수의 확률분포

170 ⑤ 171 ③ 172 23 173 ⑤ 174 ① 175 ①

08 통계적 추정

176 ④ 177 ① 178 90 179 ③ 180 369

PART 1 수학Ⅱ

1 집합

p. 14~16

3점 예상	001 ② 002 ② 003 ④ 004 ① 005 ②
4점 예상	006 ③ 007 13

001 집합의 연산법칙

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

집합의 연산 법칙을 이용하여 집합의 원소들의 합을 묻는 문제를 차집합의 연산을 이용하여 원소의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$A\cup B=\{1, 3, 5, 7, 9\}\cup\{4, 5, 6, 7\}=\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

$A\cap B=\{1, 3, 5, 7, 9\}\cap\{4, 5, 6, 7\}=\{5, 7\}$이므로

$(A\cup B)-(A\cap B)$

$=\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}-\{5, 7\}$

$=\{1, 3, 4, 6, 9\}$

따라서 $(A\cup B)-(A\cap B)$의 모든 원소의 합은 $1+3+4+6+9=23$

정답 ②

002 집합의 정의와 포함 관계

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

집합의 정의와 이차부등식의 해집합을 이용하여 상수 값을 묻는 문제를 집합의 정의와 원소의 개수 또는 공집합 등을 만족하는 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

A의 원소가 1개이므로 부등식 $x^2-2kx+7k-6\le 0$을 만족시키는 실수 x가 한 개이다.

따라서 x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+7k-6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(7k-6)=k^2-7k+6=0$

$(k-1)(k-6)=0$

$k=1$ 또는 $k=6$

따라서 모든 k의 값의 합은 $1+6=7$

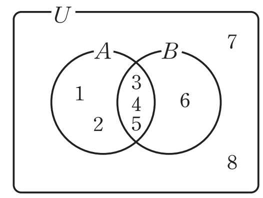
정답 ②

003 집합의 연산

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

주어진 조건을 만족하는 부분집합의 개수를 묻는 문제를 조건을 다양하게 바꾸어 부분집합의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 아래 그림과 같다.



$(A\cup X)\subset(B\cup X)$이므로 $A\subset(B\cup X)$

$(A-B)\subset X$이므로 $\{1, 2\}\subset X$ …… ㉠

$(B\cap X)\subset(A\cap X)$이고, $(A\cap X)\subset A$이므로 $(B\cap X)\subset A$

따라서 $6\not\in X$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 집합 X는 1, 2를 포함하고 6을 포함하지 않는 집합 U의 부분집합이므로 집합 X의 개수는 $2^{8-3}=2^5=32$

정답 ④

004 집합의 연산법칙, 집합의 원소의 개수

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

집합의 연산법칙과 두 집합의 합집합의 원소의 개수에 대한 공식을 이용하여 집합을 추론하는 문제를 여러 조건들을 조합하여 만들어질 수 있는 집합을 추론하는 문제로 변형하였다.

조건 (가)에서

$(A\cup B^C)\cap B=(A\cap B)\cup(B^C\cap B)=(A\cap B)\cup\varnothing=A\cap B=\varnothing$

$A\cap B=\varnothing$이므로

조건 (나)에서 $A-B=A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

조건 (다)에서

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=10-n(A\cup B)=3$이므로 $n(A\cup B)=7$

따라서 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=5+n(B)=7$

$n(B)=2$

따라서 집합 B의 원소는 집합 A에 속하지 않은 전체집합 U의 원소 2개를 선택하면 된다.

$A^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합이 최대가 되기 위해서는 $B=\{7, 9\}$이면 된다.

따라서 집합 B의 모든 원소의 합의 최댓값은 $7+9=16$

정답 ①

005 집합사이의 포함 관계

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

두 집합이 서로 소가 되는 미정계수의 개수를 묻는 문제를 집합의 포함관계를 이용하여 미정계수의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

$x^2-(a^2-1)x+a(a-1)^2$

$=\{x-(a-1)\}\{(x-a(a-1)\}$이고

$a-1-a(a-1)=(a-1)(1-a)=-(a-1)^2\le 0$이므로

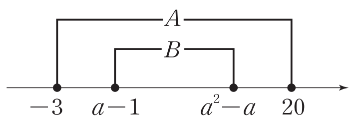
모든 실수 a에 대하여 $a-1\le a(a-1)$

따라서

$B=\{x|x^2-(a^2-1)x+a(a-1)^2\le 0\}=\{x|a-1\le x\le a(a-1)\}$

$B=A\cap B\subset A$이므로 $B\subset A$

이때 $B\subset A$를 만족시키기 위해서는 두 집합 A, B의 관계가 다음 그림과 같아야 한다.



$a-1\ge -3$에서 $a\ge -2$ …… ㉠

$a^2-a\le 20$에서 $a^2-a-20\le 0$

$(a+4)(a-5)\le 0$, $-4\le a\le 5$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서 $-2\le a\le 5$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5이고 그 합은

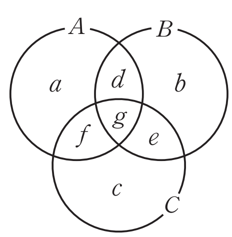
$(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5=12$

정답 ②

006 집합의 연산법칙, 집합의 원소의 개수

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

주어진 원소의 개수 조건을 만족하는 집합의 원소의 개수를 묻는 문제를 같은 유형으로 집합의 원소의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.



그림과 같이 세 집합 A, B, C의 관계를 벤다이어그램으로 나타내고 각 영역이 나타내는 집합의 원소의 개수를 나타내면

조건 (가)에서 $a+d=10$

조건 (나)에서 $b+d=7$

조건 (다)에서 $g=2$

$A=\{x|x$는 4의 배수$\}$, $B=\{x|x$는 5의 배수$\}$이므로

$n(A)=a+d+f+g=10+2+f=12+f=25$에서

$f=13$

$n(B)=b+d+g+e=7+2+e=9+e=20$에서 $e=11$

따라서 $n((A\cup B)\cap C)=e+f+g=11+13+2=26$

정답 ③

007 집합의 정의, 집합의 연산

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

집합의 정의와 집합의 연산을 이용하여 추론하는 합답형 문제를 집합의 정의와 연산을 이용하여 집합의 원소의 개수의 최댓값, 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.

$A'=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 2, 4는 짝수이므로 집합 $\{n|n\in A, n$은 홀수$\}$에 포함될 수 없다.

따라서 $\{2, 4\}\subset\left\{\frac{n}{2}\middle|n\in A, n\text{은 짝수}\right\}$이고, 4와 8은 A에 반드시 포함되어야 한다.

1, 3, 5는 홀수이므로 $\{n|n\in A, n$은 홀수$\}$ 또는 $\left\{\frac{n}{2}\middle|n\in A, n\text{은 짝수}\right\}$에 포함되어야 하므로 집합 A는 1 또는 2 중에서 적어도 하나를, 3 또는 6 중에서 하나를, 5 또는 10 중에서 하나를 원소로 갖는다.

1 또는 2 중 하나의 원소를 a, 3 또는 6 중 하나의 원소를 b, 5 또는 10 중 하나의 원소를 c라 하면 조건을 만족시키는 집합 A 중 $n(A)$의 값이 가장 큰 집합은 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$이고, $n(A)$의 값이 가장 작은 집합은 $\{a, b, c, 4, 8\}$

따라서 $M=8$, $m=5$에서 $M+m=13$

정답 13

2 명제

p. 17~18

3점 예상	008 ③	009 8	010 ⑤	011 4
4점 예상	012 35	013 ④	014 ②	

008 명제의 참 거짓

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

주어진 명제의 역이 참이 되는 하는 상수를 묻는 문제를 주어진 명제가 참이 되는 자연수의 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.

명제 $\sim p\longrightarrow q$는

'$|x|=a$이면 $x^2-6\ge 0$' …… ㉠

이때 ㉠이 참이 되기 위해서는 $a^2-6\ge 0$이어야 한다.

a가 자연수이므로 $a\ge 3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 3

정답 ③

009 절대부등식

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값을 묻는 문제를 식을 전개한 다음 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.

$(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=4+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}$

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{4a}{b}\times\frac{b}{a}}=4$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{4a}{b}=\frac{b}{a}\text{일 때 성립}\right)$

$(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)\ge 4+4=8$

따라서 최솟값은 8

정답 8

010 명제의 참 거짓

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

진리집합간의 포함관계를 통해 명제의 참, 거짓을 추론하는 문제를 명제의 참, 거짓을 통해 진리집합간의 포함관계를 묻는 문제로 변형하였다.

$p \to \sim r$, $r \to q$이 참이므로 $P \subset R^C$, $R \subset Q$

ㄱ. $P \subset R^C$에서 $R \subset P^C$이므로 $R \not\subset P$ (거짓)

ㄴ. $R \subset Q$이므로 $R-Q=\varnothing$ (참)

ㄷ. $R \subset P^C$이고 $R \subset Q$이므로 $R \subset Q \cap P^C = Q-P$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

011 산술평균, 기하평균

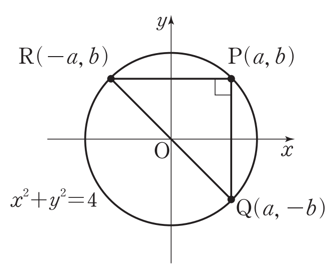
이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

좌표평면상에서 주어진 조건에 의해 만들어지는 삼각형의 넓이의 최댓값을 묻는 문제를 원을 이용하여 조건을 만족하는 삼각형의 넓이의 최댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\mathrm{P}(a, b)$는 원 $x^2+y^2=4$위에 있으므로 $a^2+b^2=4$ …… ㉠

점 Q는 점 $\mathrm{P}(a, b)$를 x축으로 대칭이동한 점이므로 $\mathrm{Q}(a, -b)$

점 R은 점 $\mathrm{P}(a, b)$를 y축으로 대칭이동한 점이므로 $\mathrm{R}(-a, b)$



삼각형 PQR은 ∠P가 직각인 직각삼각형이고, $\overline{\mathrm{PR}}=2a$, $\overline{\mathrm{PQ}}=2b$이므로 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\times 2a\times 2b=2ab$

㉠에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{4}{2}\ge\sqrt{a^2b^2}=ab$ (단, 등호는 $a^2=b^2=2$일 때 성립한다.)

이므로 $ab\le 2$

따라서 $S=2ab\le 4$이므로 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은 4

정답 4

012 명제의 역과 대우

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

명제의 대우가 참일 때, 두 조건의 진리집합 사이의 관계를 이용하여 두 정수의 순서쌍의 개수를 묻는 문제를 정수의 개수를 세는데 있어서 순열, 조합 등 경우의 수를 이용하여 풀 수 있는 문제로 변형하였다.

$\sim q \to \sim p$의 대우는 $p \to q$이다. 따라서 명제 $p \to q$가 참이다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

조건 p : $x^2-(a+b)x+ab\le 0$에서 $x^2-(a+b)x+ab\le 0$이므로

$a\le x\le b$

즉, $P=\{x\,|\,a\le x\le b\}$

조건 q : $x^2-(n+2)x+(n+1)\le 0$에서 $x^2-(n+2)x+(n+1)\le 0$이므로

$1\le x\le n+1$, 즉 $Q=\{x\,|\,1\le x\le n+1\}$

따라서 $p \to q$가 참이기 위해서는 $P\subset Q$이어야 하므로

$1\le a<b\le n+1$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $1, 2, \cdots, n, n+1$의 $n+1$개의 수 중에서 2개의 수를 선택하면 되므로 ${}_{n+1}\mathrm{C}_2$

따라서 $a_n={}_{n+1}\mathrm{C}_2=\frac{n(n+1)}{2}$

$$
\begin{aligned}
\text{따라서 } \sum_{n=1}^{5}a_n &= \sum_{n=1}^{5}\frac{n(n+1)}{2}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}n^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}n\\
&=\frac{1}{2}\times\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{5\times6}{2}\\
&=\frac{1}{2}(55+15)=35
\end{aligned}
$$

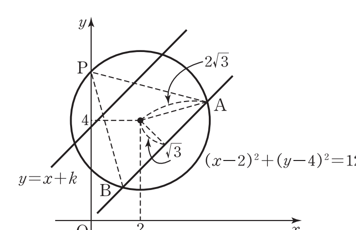
정답 35

013 명제의 참과 거짓

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

주어진 명제가 참이 되도록 하는 미지수를 묻는 문제를 주어진 명제가 참이 되도록 하는 미지수들의 곱을 묻는 문제로 변형하였다.

점 A, B, P는 원 위의 점이므로 정삼각형 PAB는 원에 내접하는 정삼각형이다.



원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$이고 정삼각형의 한 내각의 크기가 60°이므로 원의 중심 $(2, 4)$에서 직선 $y=x+k$까지의 거리는 $\sqrt{3}$

$\frac{|2-4+k|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{3}$

$k=2\pm\sqrt{6}$

따라서 모든 k의 값의 곱은 $(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})=-2$

정답 ④

014 필요조건과 충분조건

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

주어진 명제가 충분조건이 되도록 하는 미지수의 최댓값을 묻는 문제를 주어진 명제가 충분조건이 되도록 하는 미지수의 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
조건 p : $x(x-5)\ge0$에서 $x(x-5)\ge0$이므로 $x\le0$ 또는 $x\ge5$
즉, $P^C=\{x|0<x<5\}$
$\sim p$가 q이기 위한 충분조건이 되기 위해선 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 $P^C\subset Q$를 만족시켜야 한다.
따라서 $f(x)=-3x^2+(a+2)x$ 라 하면
$f(0)=0$이므로 $f(5)\ge0$이어야 한다.
$f(5)=-3\times5^2+5(a+2)\ge0$에서
$-15+(a+2)=a-13\ge0$
따라서 $a\ge13$이므로 실수 a의 최솟값은 13

정답 ②

3 함수

p. 19~21

3점 예상	015 ⑤	016 ②	017 31	018 ①	019 ④
4점 예상	020 ①	021 ③	022 4		

015 합성함수

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

함수 f의 그래프가 주어지고 합성함수의 특정 값이 주어졌을 때 정의역이 다른 합성함수의 값을 묻는 문제를 합성함수의 그래프가 주어지고 함수 f의 특정 값이 주어졌을 때 다른 함수의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$f(4)=2$, $(f\circ g)(2)=f(g(2))=2$에서 함수 f가 일대일 대응이므로 $g(2)=4$
또, $f(3)=1$, $(f\circ g)(4)=f(g(4))=1$에서 함수 f가 일대일 대응이므로 $g(4)=3$
따라서 $g(2)+g(4)=4+3=7$

정답 ⑤

016 역함수

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

두 일차함수의 역함수와 합성함수의 연산을 묻는 문제를 합성함수나 역함수에 미지수가 포함되어 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

$f^{-1}(2a)=b+1$이므로
$f(b+1)=2a$
$-2(b+1)+a+3=2a$
$a+2b=1$ …… ㉠
$f(f(b))=2$이므로
$f(-2b+a+3)=2$
$-2(-2b+a+3)+a+3=2$
$4b-a=5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하면
$a=-1$, $b=1$
따라서 $ab=-1$

정답 ②

017 함수의 뜻과 그래프

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

함수에 정의역을 대입하여 얻은 치역과 주어진 치역을 이용하여 미지수를 구하고 함숫값을 묻는 문제를 정의역과 치역을 좀 더 복잡하게 바꾸고 미지수를 구한 후 함숫값들의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$(a-3,\ a^2-4a+5)\in G$이므로 모든 실수 a에 대하여
$f(a-3)=a^2-4a+5$
$a=4$일 때, $a-3=1$이므로 $f(1)=4^2-4\times4+5=5$
$a=7$일 때, $a-3=4$이므로 $f(4)=7^2-4\times7+5=26$
따라서 $f(1)+f(4)=5+26=31$

정답 31

018 함수의 상등

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

두 함수가 같을 조건을 이용하여 미지수를 묻는 문제를 두 집합이 같아지도록 하는 집합의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

두 함수 f, g가 서로 같으므로 모든 $x\in X$에 대하여 $f(x)=g(x)$
$x^3-3x^2-2=x^2-5x$에서
$x^3-4x^2+5x-2=0$
$h(x)=x^3-4x^2+5x-2$라 하면 $h(1)=0$이므로
$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x^2-3x+2)=(x-1)^2(x-2)$
$x=1$ 또는 $x=2$
조건을 만족시키는 집합 X는 공집합이 아닌 $\{1,\ 2\}$의 부분집합 중 하나이다.
따라서 $2^2-1=3$

정답 ①

019 역함수

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

역함수의 정의를 통해 주어진 상수를 묻는 문제를 역함수를 다양한 형태로 주고 함수를 추론하여 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$g(3)=f^{-1}(2\times3-1)$
$\quad=f^{-1}(5)=7$
에서 $f(7)=5$
$f(x)=ax+b$이므로
$f(1)=3$에서 $a+b=3$ …… ㉠
$f(7)=5$에서 $7a+b=5$ …… ㉡
㉡$-$㉠에서 $6a=2$, $a=\frac{1}{3}$

$a=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $b=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

$f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$

따라서 $f(4)=\frac{1}{3}\times4+\frac{8}{3}=\frac{12}{3}=4$

정답 ④

020 일대일함수

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

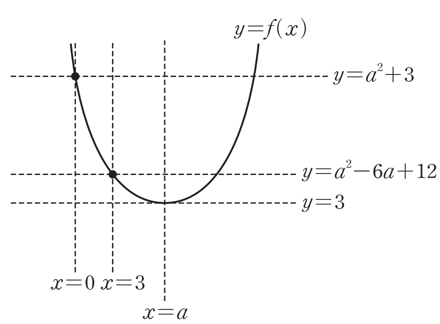
정의역과 공역이 주어졌을 때 주어진 대응이 함수가 될 수 있는 상수 값을 묻는 문제를 함수뿐 아니라 일대일함수 등 다양한 조건을 만족하는 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

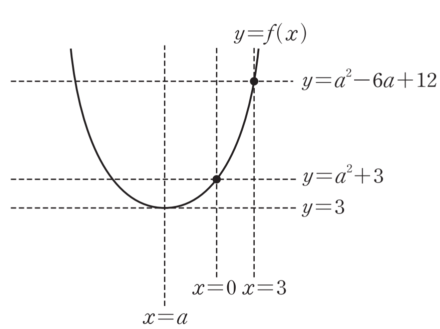
$f(x)=x^2-2ax+a^2+3$이라 하면

$x^2-2ax+a^2+3=(x-a)^2+3$에서

$y=f(x)$는 축이 $x=a$이고 최솟값이 3인 이차함수이다.

따라서 $y=f(x)$는 구간 $0\le x\le3$에서 증가 또는 감소해야 하고 치역은 $Y=\{y\mid 3\le y\le 28\}$에 속해야 하므로 그림과 같이 2가지 경우가 있다.





(i) $a\ge3$일 때

최댓값은 $x=0$일 때, a^2+3

최솟값은 $x=3$일 때, $a^2-6a+12$

$a^2-6a+12\ge3$에서 $a^2-6a+9\ge0$, $(a-3)^2\ge0$이고

$a^2+3\le28$에서 $a^2\le25$이므로

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 3, 4, 5

(ii) $a\le0$일 때

최댓값은 $x=3$일 때, $a^2-6a+12$

최솟값은 $x=0$일 때, a^2+3

모든 실수 a에 대하여 $a^2+3\ge3$이고

$a^2-6a+12\le28$에서 $a^2-6a-16\le0$, $(a-8)(a+2)\le0$,

$-2\le a\le8$

$a\le0$이므로 조건을 만족시키는 정수 a는 -2, -1, 0

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 a는 -2, -1, 0, 3, 4, 5이므로 모든 정수 a의 합은 $(-2)+(-1)+0+3+4+5=9$

정답 ①

021 일대일 대응

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

일대일함수가 되는 미지수의 순서쌍의 개수를 묻는 문제를 일대일 대응이 되는 미지수의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

주어진 조건에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2+(2+a)x & (0\le x<2)\\(a-2)x & (2\le x)\end{cases}$$

$0\le x<2$에서 $f(x)=-2\left(x^2-\frac{a+2}{2}x\right)$

이므로 축이 $x=\frac{a+2}{4}$인 이차함수이다.

(i) $a<2$ …… ㉠

$2<x$에서 $f(x)=(a-2)x$이고 $a-2<0$이므로 감소함수이다.

$0\le x<2$에서 $f(x)$가 감소함수가 되어야 하므로

$\frac{a+2}{4}\le0$

$a\le-2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통범위는 $a\le-2$이고 이때 $f(x)$는 일대일 대응이다.

(ii) $a>2$ …… ㉢

$2\le x$에서 $f(x)=(a-2)x$이고 $a-2>0$이므로 증가함수이다.

$0\le x<2$에서 $f(x)$가 증가함수가 되어야 하므로

$\frac{a+2}{4}\ge2$

$a\ge6$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통범위는 $a\ge6$이고 이 범위에서 $f(x)$는 일대일 대응이다.

(iii) $a=2$

$2\le x$에서 $f(x)=0$인 상수함수이므로 일대일 대응이 아니다.

(i), (ii), (iii)에서 $a\le-2$ 또는 $a\ge6$이고 구하는 a는 $-10\le a\le-2$, $6\le a\le10$이므로 정수 a의 개수는 14

정답 ③

022 합성함수

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

주어진 함수의 그래프를 이용하여 합성함수가 특정한 값을 가질 수 있는 미지수의 최댓값과 최솟값을 묻는 문제를 범위가 나뉘어 주어진 함수의 식을 이용하여 합성함수의 조건식을 만족하는 실수 x의 최댓값과 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.

$f(f(x))=4-f(x)$에서 $f(x)=t$라 하면

$f(t)=4-t$ …… ㉠

(i) $0<t\le1$일 때, $f(t)=4-2t$이므로 ㉠에 대입하면

$4-2t=4-t$, $t=0$

$0<t<1$이므로 ㉠을 만족하는 해가 존재하지 않는다.

(ii) $1\le t<3$일 때, $f(t)=2$이므로 ㉠에 대입하면

$2=4-t$, $t=2$

(iii) $3 \le t < 4$일 때, $f(t)=8-2t$이므로 ㉠에 대입하면

$8-2t=4-t$, $t=4$

$3 \le t < 4$이므로 ㉠을 만족하는 해가 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $t=f(x)=2$

$f(x)=2$를 만족시키는 x의 값의 범위는 $1 \le x \le 3$

따라서 실수 x의 최댓값은 3, 최솟값은 1이므로

$M+m=3+1=4$

정답 4

4 유리함수와 무리함수

p. 22~24

3점 예상	023 ⑤ 024 ③ 025 ⑤ 026 5 027 ④ 028 ③
4점 예상	029 15 030 ② 031 ④ 032 9

023 무리함수의 평행이동

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

무리함수를 평행이동하여 두 함수가 같아지도록 하는 미지수를 묻는 문제를 무리함수에 미지수가 포함되고 평행이동하여 같아지도록 하는 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

$y=\sqrt{4x+a}+b$의 그래프를 x축으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면

$y=\sqrt{4x+a-12}+b+1$의 그래프와 일치하며

$y=2\sqrt{x+1}+4=\sqrt{4x+4}+4$이므로

$4=a-12$, $b+1=4$

따라서 $a=16$, $b=3$에서

$a+b=19$

정답 ⑤

024 유리함수와 무리함수의 합성

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

유리함수와 일차함수의 합성함수의 함숫값을 묻는 문제를 무리함수와 유리함수의 합성함수의 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$g(3)=\sqrt{2\times3+3}=\sqrt{9}=3$이므로

$(f \circ g)(3)=f(g(3))=f(3)=\dfrac{3+2}{3\times3-1}=\dfrac{5}{8}$

정답 ③

025 유리함수의 그래프

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

유리함수의 대칭성질과 역함수의 관계를 이용하여 미지수들의 차를 묻는 문제를 유리함수의 함숫값과 역함수의 대칭점을 이용하여 미정계수를 찾고 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 조건 (나)에서 $y=f(x)$는 점 $(-1, 2)$ 대칭이다. 즉, 두 점근선의 교점이 $(-1, 2)$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x+1}+2$로 나타낼 수 있다.

$f(1)=4$에서 $\dfrac{k}{2}+2=4$이므로

$k=4$

$f(x)=\dfrac{4}{x+1}+2$이므로 $f(7)=\dfrac{4}{8}+2=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$

정답 ⑤

026 무리함수의 그래프

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

무리함수의 정의역과 치역을 이용하여 함숫값을 묻는 문제를 무리함수의 치역을 이용하여 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$-3\sqrt{x+1}+a \le a$이고 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y \mid y \le a\}$이므로 $a=14$

따라서 $f(x)=-3\sqrt{x+1}+14$

$f(8)=-3\sqrt{8+1}+14=-9+14=5$

정답 5

027 무리함수의 그래프

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

무리함수의 역함수 사이의 관계를 이용하여 미지수를 묻는 문제를 역함수가 지나는 점을 $y=x$ 대칭을 이용하여 역함수를 구하지 않고 미지수를 구할 수 있는지를 묻는 문제로 변형하였다.

점 $(1, 2)$가 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$2=\sqrt{a+b}$에서

$a+b=4$ ...... ㉠

점 $(1, 2)$가 $y=g(x)$의 그래프 위의 점이므로

$g(1)=2$

따라서 $f(2)=1$이므로

$1=\sqrt{2a+b}$에서

$2a+b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-3$, $b=7$이므로

$b-a=10$

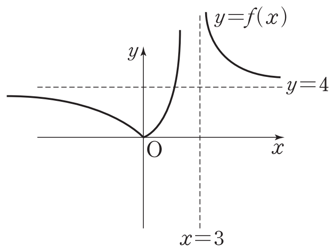
정답 ④

028 유리함수의 최댓값과 최솟값

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

유리함수의 최솟값을 이용하여 함수의 범위를 만족하는 미지수를 찾은 후 최댓값을 묻는 문제를 주어진 각각의 정의역에서 최댓값과 최솟값의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)=\left|\dfrac{4x}{x-3}\right|$의 그래프는 $y=\dfrac{4x}{x-3}=4+\dfrac{12}{x-3}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동시키면 그림과 같다.



$1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)=\left|\dfrac{4x}{x-3}\right|$는 증가하므로 최댓값은 $x=2$에서 $f(2)=8$

$4\le x\le 5$에서 함수 $f(x)=\left|\dfrac{4x}{x-3}\right|$는 감소하므로 최솟값은 $x=5$에서 $f(5)=10$

따라서 $a=8$, $b=10$에서

$a+b=18$

정답 ③

029 유리함수의 대칭

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

유리함수의 점대칭을 이용해서 유리함수의 미정계수를 묻는 문제를 점대칭뿐 아니라 직선에 대한 대칭성과 특정 직선과의 교점 등 다양한 조건을 이용해서 유리함수의 미정계수를 묻는 문제로 변형하였다.

(가)에서 $x\ne c$인 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x))=x$이므로

곡선 $y=f(x)$의 그래프는 $y=x$에 대칭이다.

두 점근선의 교점의 좌표를 (c, c)라 하면

$f(x)=\dfrac{k}{x-c}+c$ (단, k는 상수)

(나)의 조건에 의해 $f(1)=1$, $f(7)=7$에서

$\dfrac{k}{1-c}+c=1$ …… ㉠

$\dfrac{k}{7-c}+c=7$ …… ㉡

㉡에서 ㉠을 빼면

$6=k\left(\dfrac{1}{7-c}-\dfrac{1}{1-c}\right)$

$=-\dfrac{6k}{(c-1)(c-7)}$

따라서 $k=-(c-1)(c-7)$이고 이것을 ㉠에 대입하면

$2c-7=1$에서 $c=4$

$c=4$를 ㉠에 대입하면 $-\dfrac{k}{3}+4=1$에서 $k=9$

$f(x)=\dfrac{9}{x-4}+4=\dfrac{4x-7}{x-4}=\dfrac{ax-b}{x-c}$에서

$a=4$, $b=7$, $c=4$

따라서 $a+b+c=4+7+4=15$

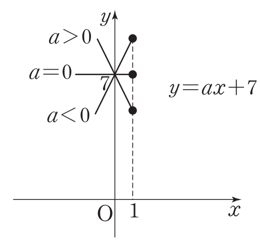
정답 15

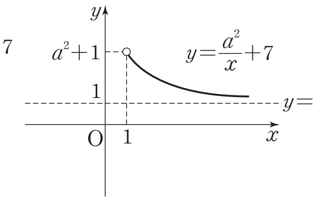
030 유리함수의 그래프

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

범위가 나누어 주어진 함수가 일대일 대응이 되는 미지수의 값을 묻는 문제를 주어진 함수의 치역과 일대일함수 조건을 이용하여 미지수를 구한 후 함숫값들의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$y=ax+7$ $(x\le 1)$과 $y=\dfrac{a^2}{x}+1$ $(x>1)$의 그래프는 다음 그림과 같다.





조건 (가)에서 함수 $f(x)=\begin{cases} ax+7 & (x\le 1) \\ \dfrac{a^2}{x}+1 & (x>1)\end{cases}$의 치역이 $\{y\,|\,y>1\}$을 만족하고 조건 (나)의 일대일함수가 되려면 $a+7=a^2+1$이고, $a<0$이어야 한다.

$a+7=a^2+1$에서 $a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$

$a=-2$ 또는 $a=3$

이때 $a<0$이므로 $a=-2$

함수 $f(x)=\begin{cases} -2x+7 & (x\le 1) \\ \dfrac{4}{x}+1 & (x>1)\end{cases}$이므로

$f(2)=\dfrac{4}{2}+1=3$, $f(-1)=-2\times(-1)+7=9$에서

$f(2)+f(-1)=3+9=12$

정답 ②

031 유리함수의 정의역과 치역

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

유리함수의 정의역과 치역의 연산과 함숫값을 이용하여 미지수를 묻는 문제를 유리함수의 정의역과 치역의 연산과 함숫값을 이용하여 미지수를 찾은 후 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}=\dfrac{a-b}{x+b}+1$이므로

정의역 $A=\{x\,|\,x\ne -b$인 실수$\}$, 치역 $B=\{y\,|\,y\ne 1$인 실수$\}$

$A-B=A\cap B^C=\varnothing$이고 $B^C=\{1\}$에서 $-b=1$, $b=-1$

$f(3)=\dfrac{3+a}{3-1}=\dfrac{a+3}{2}=4$에서 $a+3=8$, $a=5$

따라서 $f(2)=\dfrac{2+5}{2-1}=7$

정답 ④

032 유리함수의 평행이동

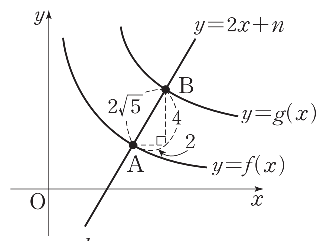
이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

유리함수의 평행이동과 삼각형의 넓이를 이용하여 함숫값을 묻는 문제를 유리함수의 평행이동과 직선과의 관계에 의하여 함숫값들을 묻는 문제로 변형하였다.

직선 $y=2x+n$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 $y=2x+n$의 기울기는 2이고, 실수 n값에 관계없이 선분 AB의 길이는 항상 $2\sqrt{5}=\sqrt{20}=\sqrt{2^2+4^2}$이므로 점 A를 x축의 방

향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동시키면 점 B가 된다.

곡선 $y=g(x)$의 그래프는 $f(x)=\frac{k}{x}$ $(x>0)$의 그래프를 x축으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동시킨 것이므로



$g(x)=\frac{k}{x-2}+4$ $(x>2)$

곡선 $y=g(x)$는 $(4,\ 7)$을 지나므로 $g(4)=\frac{k}{2}+4=7$에서 $k=6$

따라서 $f(2)=\frac{6}{2}=3$, $g(5)=\frac{6}{5-2}+4=6$이므로

$f(2)+g(5)=3+6=9$

정답 9

5 등차수열과 등비수열

p. 25~27

3점 예상	033 ②	034 38	035 14	036 ①
4점 예상	037 ①	038 26	039 ④	

033 등비수열의 합

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

주어진 조건을 이용하여 등비수열의 공비를 묻는 문제를 새로운 형태의 등비수열의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_3=a_1r^2=24$ …… ㉠

$a_9+a_{10}=ra_8+r^2a_8=2a_8$ …… ㉡

㉡에서 $r^2+r-2=0$이므로

$r=-2$ $(\because r\neq1)$

㉠에서 $a_1=6$

$$S_n+S_{n+1}=\frac{6\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}+\frac{6\{1-(-2)^{n+1}\}}{1-(-2)}$$
$$=4-2(-2)^{n+1}-2(-2)^n$$
$$=4+2(-2)^n>1000$$

따라서 n의 최솟값은 10

정답 ②

034 등차수열의 합

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

등비수열의 합을 묻는 문제를 등차수열의 일반항 또는 절댓값이 포함된 수열의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1이라 놓으면 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{10\times\{2a_1+9\times(-3)\}}{2}=5$

따라서 $a_1=14$

첫째항이 14, 공차가 -3이므로

$a_n=14+(-3)(n-1)=-3n+17$

$|a_1|+|a_3|+|a_5|+|a_7|+|a_9|$

$=14+8+2+4+10=38$

정답 38

035 등차수열의 합

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

등차수열의 합의 최솟값을 묻는 문제를 수열의 항 사이에 수를 넣어 만든 새로운 수열을 이용하여 일반항을 구하고 그 합의 최댓값 또는 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.

$44,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ -22$은 첫째항이 44, 끝항이 -22, 항수가 $n+2$인 등차수열이므로

$\frac{44+(-22)}{2}\times(n+2)=253$이므로 $n=21$

이때 이 수열의 공차를 d라 하면

$44+22d=-22$이므로 $d=-3$

따라서 $a_n=41+(n-1)\times(-3)=-3n+44$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k$의 값이 최대가 되려면 $a_k>0$이어야 하므로

$a_k=-3k+44>0$

$k<\frac{44}{3}=14.666\cdots$

따라서 $k=14$일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k$의 값이 최대가 된다.

정답 14

036 등비수열의 합

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

등비중항을 이용하여 주어진 수열의 일반항과 그 합을 묻는 문제를 등비중항을 이용하여 새로운 수열의 일반항과 그 합을 묻는 문제로 변형하였다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=1+(n-1)d$

세 항 $a_2,\ a_6,\ a_{22}$는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_6^{\ 2}=a_2\times a_{22}$에서

$(1+5d)^2=(1+d)(1+21d)$, $1+10d+25d^2=1+22d+21d^2$

$d^2-3d=0$, $d(d-3)=0$

d는 양수이므로 $d=3$

$S_n=\frac{n\{2\times1+(n-1)\times3\}}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$

$S_n>100$에서

$n(3n-1)>200$

$3n^2-n-200>0$

$(n+8)(3n-25)>0$이므로

$n>\frac{25}{3}$

따라서 $S_n>100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 9

정답 ①

037 등차수열의 합

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

등차수열의 합의 원리를 이용하여 미정계수를 묻는 문제를 등차수열의 합을 다양하게 표현했을 때 미정계수를 묻는 문제로 변형하였다.

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로

$a_1+a_{50}=a_2+a_{49}=a_3+a_{48}=\cdots=a_{25}+a_{26}$이므로

$a_{31}+a_{32}+a_{33}+\cdots+a_{50}$

$=k(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50})-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20})$

$k(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50})$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20})+a_{31}+a_{32}+a_{33}+\cdots+a_{50}$

$k\times\dfrac{50(a_1+a_{50})}{2}=(a_1+a_{50})+(a_2+a_{49})+\cdots+(a_{20}+a_{31})$에서

$k\times25(a_1+a_{50})=20(a_1+a_{50})$이므로

$k=\dfrac{20}{25}=\dfrac{4}{5}$

마찬가지의 방법으로

$a_1+a_{80}=a_2+a_{79}=a_3+a_{78}=\cdots=a_{40}+a_{41}$이므로

$a_{31}+a_{32}+a_{33}+\cdots+a_{50}=lS_{80}$에서

$(a_{31}+a_{50})+(a_{32}+a_{49})+\cdots+(a_{40}+a_{41})=l\dfrac{80(a_1+a_{80})}{2}$

$10(a_1+a_{80})=l\times40(a_1+a_{80})$이므로

$l=\dfrac{1}{4}$

따라서 $20(k+l)=20\left(\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{4}\right)=21$

정답 ①

038 등비수열의 합

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

등비수열의 합의 관계를 이용하여 공비를 묻는 문제를 등비수열의 합의 관계가 다양한 형태로 나올 때 공비를 묻는 문제로 변형하였다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $S_{15}=7S_5$에서 $r\neq1$이므로

$\dfrac{a(r^{15}-1)}{r-1}=7\times\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}$

$r^{15}-1=7(r^5-1)$

양변을 r^5-1로 나누면

$r^{10}+r^5+1=7$

$r^5=t\ (t>0)$이라 하면

$t^2+t-6=0,\ (t-2)(t+3)=0$

$t>0$이므로 $t=r^5=2$

$$\frac{S_{30}}{S_{20}}=\frac{\dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}}{\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}}$$

$$=\frac{r^{30}-1}{r^{20}-1}$$

$$=\frac{r^{20}+r^{10}+1}{r^{10}+1}$$

$$=\frac{(r^5)^4+(r^5)^2+1}{(r^5)^2+1}$$

$$=\frac{2^4+2^2+1}{2^2+1}=\frac{21}{5}$$

$p=5,\ q=21$이므로 $p+q=26$

정답 26

039 등비수열의 합

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

원과 직선의 관계를 이용하여 등비수열의 합을 묻는 문제를 유리함수와 직선의 관계를 이용하여 등비수열의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

기울기가 -2이고 곡선 $y=\dfrac{2^n}{x}$과 제1사분면에서 접하는 직선 l_n의 방정식을 $y=-2x+k\ (k>0)$이라 하면

$\dfrac{2^n}{x}=-2x+k$에서

$2x^2-kx+2^n=0$은 중근을 갖는다.

이차방정식 $2x^2-kx+2^n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-8\times2^n=0$에서

$k>0$이므로 $k=\sqrt{8\times2^n}$

즉, 두 점 A_n, B_n의 좌표는 각각 $A_n(\sqrt{2\times2^n},\ 0)$, $B_n(0,\ \sqrt{8\times2^n})$이다.

삼각형 OA_nB_n의 넓이 S_n은

$S_n=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2\times2^n}\times\sqrt{8\times2^n}=2^{n+1}$

S_n은 첫째항이 4이고 공비가 2인 등비수열이므로

$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{10}=\dfrac{4(2^{10}-1)}{2-1}=2^{12}-4$

정답 ④

6 수열의 합 p. 28~30

3점 예상	040 19	041 ①	042 37	043 ②	044 ③
	045 ④	046 ③			
4점 예상	047 529	048 ③	049 990		

040 합의 기호 $\sum$의 성질

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

$\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 묻는 문제를 조건이 더 많아지는 경우라도 $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는 문제로 변형하였다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2a_k+2b_k+2c_k)=24$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k+c_k)=12$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=3,\ \sum_{k=1}^{10}b_k=7,\ \sum_{k=1}^{10}c_k=2$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3b_k-4c_k)=6+21-8=19$

정답 19

041 합의 기호 $\sum$의 성질

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

$\sum$의 성질을 활용하여 등차수열의 공차를 이용한 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제를 등차수열의 공차를 활용한 $\sum$의 성질을 묻는 문제로 변형하였다.

$$\sum_{k=2}^{11} a_{2k}-\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{10} a_{2k+2}-\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{10} (a_{2k+2}-a_{2k-1})$$

공차가 $\frac{3}{2}$이므로 $a_{2k+2}-a_{2k-1}=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

따라서 $\sum_{k=2}^{11} a_{2k}-\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}=10\times\frac{9}{2}=45$

정답 ①

042 합의 기호 $\sum$의 성질

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

$\sum$의 성질을 활용하여 일반항과 합과의 관계를 이용한 등차수열의 항을 묻는 문제를 $\sum$ 성질을 활용하여 등차수열이나 등비수열과 연관지어 특정한 항을 구할 수 있는지를 묻는 문제로 변형하였다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 $a_n=a+2(n-1)$

$b_6=12$이므로 $\sum_{k=1}^{n} kb_k=a_n^2$에서

$6b_6=a_6^2-a_5^2$이므로

$6\times12=(a+10)^2-(a+8)^2$

$72=4a+36,\ a=9$

$a_{15}=9+2\times14=37$

정답 37

043 소거되는 수열의 합

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

주어진 식을 변형하여 소거되는 수열의 합을 묻는 문제를 다양한 형태의 식을 소거되는 수열의 합으로 변형시켜 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$\frac{(k+1)a_k-ka_{k+1}}{a_ka_{k+1}}=\frac{k+1}{a_{k+1}}-\frac{k}{a_k}$이므로

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{(k+1)a_k-ka_{k+1}}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{15}\left(-\frac{k}{a_k}+\frac{k+1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}\right)+\left(-\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}\right)+\left(-\frac{3}{a_3}+\frac{4}{a_4}\right)+\cdots+\left(-\frac{15}{a_{15}}+\frac{16}{a_{16}}\right)$$
$$=-\frac{1}{a_1}+\frac{16}{a_{16}}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{16}{a_{16}}=\frac{5}{6}$$
$$\frac{16}{a_{16}}=\frac{5}{6}+\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$$

따라서 $a_{16}=12$

정답 ②

044 소거되는 수열의 합

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

유리화를 이용해서 서로 소거되는 수열의 합을 묻는 문제를 부분분수 변형이나 다양한 형태의 식이 소거되는 수열의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$=\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

이때 $\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{11}{15}$이므로

$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{90}$

따라서 $n=8$

정답 ③

045 소거되는 수열의 합

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

부분분수 변형을 활용하여 소거되는 수열의 합이 정수가 되는 미지수의 값을 묻는 문제를 소거되는 수열의 합이 정수가 되는 자연수의 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.

$$\sum_{k=1}^{22}\frac{a^2}{4k^2-1}=a^2\sum_{k=1}^{22}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{a^2}{2}\sum_{k=1}^{22}\left\{\frac{1}{(2k-1)}-\frac{1}{(2k+1)}\right\}$$
$$=\frac{a^2}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{43}-\frac{1}{45}\right)\right\}$$
$$=\frac{22}{45}a^2$$

$45=3^2\times5$이므로 $\frac{22}{45}a^2$이 자연수가 되도록 하는 a의 최솟값은 15

정답 ④

046 자연수의 거듭제곱의 합

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

나머지 정리를 이용해서 수열의 일반항을 찾아서 수열의 합을 묻는 문제를 수열의 합을 식으로 나타내고 그 식의 나머지를 찾거나 인수분해를 이용해서 근을 묻는 문제로 변형하였다.

다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는 $f(3)$

$$f(3)=\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{3}(k^2+1)$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}-1-(2+5+10)=367$$

정답 ③

047 합의 기호 $\sum$의 성질

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

특정한 수열을 만족하는 또 다른 수열의 합의 값을 묻는 문제를 등차수열, 등비수열이 지수와 로그 및 특정한 방정식과 연관된 식을 이용하여 또 다른 수열의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$a_n=-1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}$

$\log_2 a_m=k$에서 $a_m=2^k$

$\frac{1}{2}m-\frac{3}{2}=2^k$

$m=2^{k+1}+3=b_k$

$\sum_{k=1}^{7} b_k=\sum_{k=1}^{7}(2^{k+1}+3)=\frac{4(2^7-1)}{2-1}+21=529$

정답 529

048 합의 기호 $\sum$의 성질

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

수열의 합을 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어서 구할 수 있는지를 묻는 문제를 주어진 수열의 합의 규칙을 발견하여 조건을 만족하는 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 나열하면 다음과 같다.

$-1, 5, -9, 13, -17, 21, \cdots$

이때 모든 자연수 m에 대하여

$a_{2m-1}=-1+(m-1)\times(-8)=-8m+7$

$a_{2m}=5+(m-1)\times 8=8m-3$

이므로 $a_{2m-1}+a_{2m}=4$, $a_{2m}+a_{2m+1}=-4$

$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k\right|$를 구하려면

(i) m이 짝수일 때

$m=2p$ (p는 자연수)

$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{2p} a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{p}(a_{2k-1}+a_{2k})\right|=4p$

170과의 차가 최소가 되는 $4p=168$ 또는 $4p=172$

$m=2p$이므로 $m=84$ 또는 $m=86$

(ii) m이 홀수일 때

$m=2p-1$ (p는 자연수)

$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{2p-1} a_k\right|=\left|a_1+\sum_{k=1}^{p-1}(a_{2k}+a_{2k+1})\right|$

$=\left|-1+\sum_{k=1}^{p-1}(-4)\right|=4p-3$

170과의 차가 최소가 되는 $4p-3=169$

$m=2p-1=85$

(i), (ii)에 의해 $m=85$

정답 ③

049 자연수의 거듭제곱의 합

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

원과 직선을 활용하여 도형의 넓이의 합을 묻는 문제를 원과 직선 및 다른 도형을 활용하여 주어진 도형의 넓이나 넓이의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

점 C_n, A_n에서 직선 $3x-4y=0$에 내린 수선의 발을 각각 M_n, N_n이라 하면

$\overline{C_nM_n}=\frac{|0-36n|}{5}=\frac{36}{5}n$, $\overline{A_nN_n}=\frac{|0-12n|}{5}=\frac{12}{5}n$

사각형 $A_nC_nE_nD_n$의 넓이 a_n은 삼각형 OC_nE_n의 넓이에서 삼각형 OA_nD_n의 넓이를 뺀 것과 같다.

삼각형 OC_nE_n의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{C_nM_n}\times\overline{OE_n}=\frac{1}{2}\times\frac{36}{5}n\times 6n=\frac{108}{5}n^2$

삼각형 OA_nD_n의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{A_nN_n}\times\overline{OD_n}=\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}n\times 3n=\frac{18}{5}n^2$

따라서 $a_n=\frac{108}{5}n^2-\frac{18}{5}n^2=18n^2$

$\sum_{k=1}^{5} a_k=\sum_{k=1}^{5} 18k^2=18\times\frac{5\times 6\times 11}{6}=990$

정답 990

7 수학적 귀납법

p. 31~32

3점 예상	050 ③	051 57
4점 예상	052 ①	053 7

050 등차수열의 귀납적 정의

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

주어진 수열이 등차수열이라는 것을 알아내서 수열의 일반항을 구하여 조건을 만족하는 자연수의 값을 묻는 문제를 다른 형태의 등차수열의 식과 다른 조건들을 주고 조건을 만족하는 값을 묻는 문제로 변형하였다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=a_n-4$, 즉 $a_{n+1}-a_n=-4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -4인 등차수열이다.

$a_1=30$이므로 $a_n=30-4(n-1)=-4n+34$

따라서 $\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(-4k+34)$

$=-4\sum_{k=1}^{n} k+34n$

$=-4\times\frac{n(n+1)}{2}+34n$

$=-2n^2+32n$

$=-2(n^2-16n+64)+128$

$=-2(n-8)^2+128$

에서 $\sum_{k=1}^{n} a_k$의 최댓값은 128

정답 ③

051 수열의 귀납적 정의

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

수열의 귀납적 정의를 이용해 수열의 값을 묻는 문제를 다양한 귀납적 정의를 이용하여 규칙성을 묻는 문제로 변형하였다.

$a_1=3$

$a_2=\frac{3+5}{2}=4$

$a_3=\frac{4}{2}=2$

$a_4=\frac{2}{2}=1$

$a_5=\frac{1+5}{2}=3$

$a_6=\frac{3+5}{2}=4$

$\vdots$

이므로 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+4}$

따라서 $\sum_{k=1}^{22} a_k=5(3+4+2+1)+(3+4)=50+7=57$

정답 57

052 수학적 귀납법

이 문제의 변형 포인트!	**자료 상황의 활용**

수열을 수학적 귀납법으로 증명하는 문제를 빈 칸에 알맞은 식을 추론하고 추론한 식을 바탕으로 한 연산 결과를 묻는 문제를 수학적 귀납법으로 배수 증명을 묻는 문제로 변형하였다.

다음은 모든 자연수 n에 대하여 n^3+5n이 6의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

$a_1=1^3+5\times1=6$

이므로 a_1은 6의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, a_k가 6의 배수라고 가정하면 어떤 자연수 m에 대하여

$a_k=k^3+5k=6m$이므로

$a_{k+1}=(k+1)^3+5(k+1)$

$=6m+\boxed{3k(k+1)+6}$

이때 $k(k+1)$은 짝수이므로 어떤 자연수 l에 대하여

$k(k+1)=\boxed{2l}$

$a_{k+1}=6(m+l+1)$이므로

a_{k+1}은 6의 배수이다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 a_n은 6의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 6의 배수이다.

$f(k)=3k(k+1)+6$

$g(l)=2l$

$f(3)=3\times3\times4+6=42$

$g(4)=2\times4=8$

따라서 $f(3)+g(4)=42+8=50$

정답 ①

053 수열의 귀납적 정의

이 문제의 변형 포인트!	**문항의 축소, 확대 변형**

주어진 조건을 만족하는 수열의 첫째항을 묻는 문제를 수학적 귀납법으로 조건을 만족하는 세 번째항을 묻는 문제로 변형하였다.

모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}+a_n=2n$ …… ㉠

n 대신에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+2}+a_{n+1}=2n+2$ …… ㉡

㉡에서 ㉠을 빼면 $a_{n+2}-a_n=2$이고 $a_{n+2}=a_n+2$

$a_1=a$라 하면 $a_2=2-a$이고

$a_3=a+2,\ a_4=4-a$

$a_5=a+4,\ a_6=6-a$

$a_7=a+6,\ a_8=8-a$

$a_9=a+8,\ a_{10}=10-a$

$\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}-a_{2k})$

$=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$

$=\{a+(a+2)+(a+4)+(a+6)+(a+8)\}$

$-\{(2-a)+(4-a)+(6-a)+(8-a)+(10-a)\}$

$=10a-10$

$10a-10=40$이므로 $a=5$

따라서 $a_3=7$

정답 7

8 지수

p. 33

3점 예상	054 16 055 ④
4점 예상	056 72

054 지수가 유리수인 지수법칙

이 문제의 변형 포인트!	**자료 상황의 활용**

지수가 유리수인 지수법칙을 이용해서 분수값을 묻는 문제를 조건에 분수값을 주고 지수를 묻는 문제로 변형하였다.

$6^x=9^y=k$라 하면 (단, $k>0$)

$6^x=k$에서 $k^{\frac{1}{x}}=6$이고 $k^{\frac{2}{x}}=36$

$9^y=k$에서 $k^{\frac{1}{y}}=9$

$k^2=k^{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}=36\div9=4$이고 $k>0$이므로

$k=2$

따라서 $(6^x+9^y)^2=(2+2)^2=4^2=16$

정답 16

055 거듭제곱근의 성질

이 문제의 변형 포인트!	**자료 상황의 활용**

거듭제곱근의 성질을 이용해 지수의 값을 묻는 문제를 상수를 바꾸면서 지수의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$$
\begin{aligned}
x^2&=\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^2\\
&=(\sqrt[3]{2})^2-2\times\sqrt[3]{2}\times\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^2\\
&=\sqrt[3]{4}-\frac{2}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\\
&=\sqrt[3]{4}-\frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\\
&=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\\
&=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}
\end{aligned}
$$

따라서 $\frac{1}{x^2}=2\sqrt[3]{2}$

정답 ④

056 거듭제곱근의 성질

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

거듭제곱근의 성질과 자연수의 거듭제곱의 성질을 통해 식의 값이 자연수가 될 수 있는 상수들의 순서쌍의 개수를 묻는 문제를 거듭제곱근에 들어갈 수 있는 값을 변화시켜서 순서쌍의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3m]{27^{72}}\times\sqrt[4n]{4^{150}}&=27^{\frac{72}{3m}}\times4^{\frac{150}{4n}}\\
&=3^{\frac{72}{m}}\times2^{\frac{75}{n}}
\end{aligned}
$$

의 값이 자연수가 되려면 2, 3는 서로소이므로 $\frac{72}{m}$, $\frac{75}{n}$이 모두 자연수이어야 한다.

따라서 m은 72의 양의 약수이고, n은 75의 양의 약수이다.

$72=2^3\times3^2$이므로 72의 양의 약수의 개수는

$(3+1)\times(2+1)=12$

$75=3\times5^2$이므로 75의 양의 약수의 개수는

$(1+1)\times(2+1)=6$

따라서 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $12\times6=72$

정답 72

9 로그

p. 34~35

3점 예상	057 63	058 ②	059 ④	060 ③
4점 예상	061 ①	062 ⑤		

057 로그의 밑의 변환 공식

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 식을 계산하는 문제를 다양한 연산법칙을 이용하는 계산 문제로 변형하였다.

$$
\begin{aligned}
9\times5^{\log_{25}49}&=9\times5^{\log_{5^2}7^2}\\
&=9\times5^{\log_5 7}\\
&=9\times7^{\log_5 5}\\
&=9\times7^1\\
&=9\times7=63
\end{aligned}
$$

정답 63

058 로그의 성질

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

좌표평면 위의 점의 좌표가 로그로 주어졌을 때 로그의 연산을 이용하여 기울기 값을 묻는 문제를 주어진 점의 좌표를 다양하게 변형하여 로그의 연산을 묻는 문제로 변형하였다.

두 점 $\mathrm{A}(n,\ \log_3 n)$, $\mathrm{B}(n+1,\ \log_3(n+1))$의 기울기 a_n은

$$a_n=\frac{\log_3(n+1)-\log_3 n}{n+1-n}=\log_3(n+1)-\log_3 n$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{10}a_n&=\sum_{n=1}^{10}\{\log_3(n+1)-\log_3 n\}\\
&=(\log_3 2-\log_3 1)+(\log_3 3-\log_3 2)\\
&\qquad+\cdots+(\log_3 10-\log_{10} 9)+(\log_3 11-\log_{10} 10)\\
&=\log_3 11
\end{aligned}
$$

$p=\log_3 11$이므로

$3^p=3^{\log_3 11}=11^{\log_3 3}=11^1=11$

정답 ②

059 로그의 연산

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

주어진 식을 변형하여 지수를 대입하여 로그값을 묻는 문제를 로그를 이용한 조건이 주어졌을 때 문제에 맞게 변형하여 지수 계산을 할 수 있는지 묻는 문제로 변형하였다.

$$
\begin{aligned}
4^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}&=4^{\frac{1}{\log_3 2}+\frac{1}{\log_3 4}}\\
&=4^{\log_2 3+\log_4 3}\\
&=2^{2\log_2 3}\times4^{\log_4 3}\\
&=2^{\log_2 3^2}\times4^{\log_4 3}\\
&=3^2\times3=27
\end{aligned}
$$

$3^c=27$이므로 $c=3$

정답 ④

060 로그의 밑의 변환 공식의 활용

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

지수로 주어진 조건을 로그로 변환하여 인수분해한 식에 대입하여 로그의 곱셈이나 밑 변환 공식을 이용하여 식의 값을 묻는 문제를 같은 유형으로 식과 지수의 조건만 다르게 변형하여 식의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$2^{x-y}=5$, $5^{x+y}=8$에서

$x-y=\log_2 5$, $x+y=\log_5 8$

$$\begin{aligned} x^2-y^2 &= (x-y)(x+y) \\ &= \log_2 5\times\log_5 8 \\ &= \log_2 5\times\log_5 2^3 \\ &= \log_2 5\times(3\log_5 2) \\ &= 3\log_2 5\times\log_5 2 \\ &= 3\times1=3 \end{aligned}$$

정답 ③

061 상용로그

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

상용로그의 값을 근삿값으로 계산하여 조건을 만족하는 정수의 값을 묻는 문제를 n의 값에 따라 조건을 만족하는 정수 값들을 묻는 문제로 변형하였다.

$$\begin{aligned} \log\frac{4}{3} &= \log 4-\log 3 \\ &= 2\log 2-\log 3 \\ &= 2\times0.3010-0.4771 \\ &= 0.6020-0.4771 \\ &= 0.1249 \text{에서} \end{aligned}$$

$\log\left(\frac{4}{3}\right)^{10}=10\times\log\left(\frac{4}{3}\right)=10\times0.1249=1.249$

$\log\left(\frac{4}{3}\right)^{20}=20\times\log\left(\frac{4}{3}\right)=20\times0.1249=2.498$이므로

$1<\log\left(\frac{4}{3}\right)^{10}<2$에서 $a_{10}=1$

$2<\log\left(\frac{4}{3}\right)^{20}<3$에서 $a_{20}=2$

따라서 $a_{10}+a_{20}=1+2=3$

정답 ①

062 로그의 성질

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

주어진 조건을 로그의 성질을 이용해서 간단히 한 후, 로그 값들의 비를 묻는 문제를 주어진 조건을 수열, 비 등으로 변형한 뒤 특정 식의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\log_3 a=x$, $\log_3 b=y$, $\log_3 c=z$라 하면

조건 (가)에서 x, y, z는 순서대로 등비수열을 이루므로

$y^2=xz$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 $(3x+z):y=4:1$이므로

$4y=3x+z$에서 $z=4y-3x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$y^2=x(4y-3x)$, $y^2=4xy-3x^2$

$3x^2-4xy+y^2=0$, $(3x-y)(x-y)=0$

즉, $y=3x$ 또는 $y=x$

그런데 $y=x$이면 $\log_3 a=\log_3 b$에서 $a=b$이므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 $y=3x$이므로 ㉡에 대입하면

$z=12x-3x=9x$

$$\text{따라서 } \frac{\log_3 a+\log_3 c}{\log_3 b}=\frac{x+z}{y}=\frac{x+9x}{3x}=\frac{10x}{3x}=\frac{10}{3}$$

정답 ⑤

1 수열의 극한 p. 38~40

3점 예상	063 ⑤ 064 ③ 065 ⑤ 066 ③ 067 ⑤
4점 예상	068 ② 069 ④ 070 ②

063 등비수열의 극한

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

등비수열의 극한값을 묻는 문제를 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 일반항을 구하고 그 합을 이용하여 극한값을 묻는 문제로 변형하였다.

$a_{2n}=a_2\times 3^{n-1}=4\times 3^{n-1}$

$a_{2n-1}=a_1\times 3^{n-1}=3^{n-1}$이므로 $a_{2n+1}=3^n$

$$S_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$$
$$=\frac{3^n-1}{3-1}+\frac{4(3^n-1)}{3-1}$$
$$=\frac{5\times 3^n-5}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}+a_{2n+1}}{S_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3^{n-1}+3^n}{\frac{5\times 3^n-5}{2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{3}+1}{\frac{5-\frac{5}{3^n}}{2}}=\frac{\frac{4}{3}+1}{\frac{5}{2}}=\frac{14}{15}$$

정답 ⑤

064 극한값의 성질

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

극한값의 대소관계를 이용하여 극한값을 묻는 문제를 수열의 합과 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴에서 극한값을 가질 조건을 이용하여 수렴하는 극한값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\left|a_n-\sum_{k=1}^{n}k^2\right|<n^2$에서

$$-n^2<a_n-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}<n^2$$

$-n^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}<a_n<n^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이고,

$(2n-1)(4n^2+2n+1)=8n^3-1$이므로

$$-\frac{n^2}{8n^3-1}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(8n^3-1)}<\frac{a_n}{8n^3-1}<\frac{n^2}{8n^3-1}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(8n^3-1)}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n^2}{8n^3-1}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(8n^3-1)}\right)=\frac{1}{24}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{8n^3-1}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(8n^3-1)}\right)=\frac{1}{24}$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(2n-1)(4n^2+2n+1)}=\frac{1}{24}$$

정답 ③

065 수열의 극한값의 계산

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

극한값의 성질을 이용하여 극한값을 묻는 문제를 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이 수렴하도록 식을 변형하여 극한값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-5)=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n+2b_n}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2a_n}{n^2+1}+\frac{2b_n}{n^2+1}}{\frac{n^2-1}{n^2+1}}=3+2\times 2=7$$

정답 ⑤

066 수열의 극한값의 계산

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

$\infty-\infty$ 형태의 수열의 극한값이 주어져 있을 때 $\frac{\infty}{\infty}$ 형태로 바꾸어 미지수의 합을 묻는 문제를 같은 유형으로 $\infty-\infty$ 형태의 수열에 들어가는 식을 복잡하게 주고 미지수의 차를 묻는 문제로 변형하였다.

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+2n-1}-(an+b)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+2n-1}-(an+b)\}\{\sqrt{n^2+2n-1}+(an+b)\}}{\sqrt{n^2+2n-1}+(an+b)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+2(1-ab)n-(1+b^2)}{\sqrt{n^2+2n-1}+(an+b)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n+2(1-ab)-\frac{1+b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+a+\frac{b}{n}}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠이 2에 수렴하려면

$1-a^2=0$, $\frac{2(1-ab)}{1+a}=2$, $a\neq-1$

$a=1$, $b=-1$

따라서 $2a-b=2-(-1)=3$

정답 ③

067 수열의 극한값의 계산

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

무리함수의 평행이동과 직선의 교점을 이용하여 수열의 극한을 묻는 문제를 다항함수와 직선의 교점을 이용하여 도형의 넓이를 수열의 극한으로 바꾸어 구할 수 있는지를 묻는 문제로 변형하였다.

P_n, P_{n+3}, Q_n, Q_{n+3}의 좌표는 각각

$P_n(\sqrt{n},\ n)$, $P_{n+3}(\sqrt{n+3},\ n+3)$, $Q_n(\sqrt{n},\ 0)$, $Q_{n+3}(\sqrt{n+3},\ 0)$이고
사각형 $P_nQ_nQ_{n+3}P_{n+3}$의 넓이 S_n은

$$S_n=\frac{1}{2}\times(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})\times(n+n+3)$$
$$=\frac{3(2n+3)}{2(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+9}{2(\sqrt{n^2+3n}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{9}{n}}{2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}$$
$$=\frac{6}{2(1+1)}=\frac{3}{2}$$

정답 ⑤

068 수열의 수렴과 발산

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 묻는 문제를 주어진 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는지를 묻는 문제로 변형하였다.

ㄱ. (반례) $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=(-1)^n$이면

두 수열 $\left\{a_n-\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\left(a_n-\frac{1}{n}\right)b_n\right\}$이 모두 수렴하지만

수열 $\{b_n\}$은 발산한다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}|a_n-2b_n|=0$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-2b_n)+2b_n\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)+2\lim_{n\to\infty}b_n=0+2=2\ (\text{참})$$

ㄷ. (반례) $a_n=n$, $b_n=n+\frac{1}{n^2}$, $c_n=n+\frac{1}{n}$이면 $a_n<b_n<c_n$이고,

$\lim_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$이지만 수열 $\{b_n\}$은 발산한다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

정답 ②

069 수열의 극한값의 계산

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

수열의 합을 이용하여 일반항을 묻는 문제를 수열의 합을 이용하여 일반항을 구할 때 첫째항을 정확히 알고 그 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$$
$$=1-\frac{1}{a_{n+1}}\text{이므로}$$

$1-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$에서

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}}$$

즉, $a_{n+1}=2^{n+1}$이므로

$n\geq2$일 때, $a_n=2^n$

즉, $a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 2^n & (n\geq2)\end{cases}$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=1+\sum_{k=2}^{n}2^k$$
$$=1+\frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$=2^{n+1}-3$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(S_n)^2}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+1}-3)^2}{2^{2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times4^n-12\times2^n+9}{4^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{4-12\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+9\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=4$$

정답 ④

070 수열의 극한값의 계산

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

이차방정식의 판별식을 이용하여 등비수열의 극한을 묻는 문제를 다항식의 나머지정리를 이용하여 등비수열의 극한을 묻는 문제로 변형하였다.

다항식 $3x^{n+1}-x+1$을 $f(x)$라 하고, $f(x)$를 이차식 x^2-5x+4으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R_n(x)$를 $R_n(x)=ax+b$라 하면

$$f(x)=(x^2-5x+4)Q(x)+R_n(x)$$
$$=(x-1)(x-4)Q(x)+R_n(x)$$

나머지정리에 의하여 $f(1)=R_n(1)$, $f(4)=R_n(4)$이므로

$a+b=3$, $4a+b=3\times4^{n+1}-3$이고 두 식을 연립하면

$a=4^{n+1}-2$, $b=-4^{n+1}+5$

이므로 $R_n(x)=(4^{n+1}-2)x+5-4^{n+1}$

$R_n(2)=4^{n+1}+1$, $R_n(3)=2\times4^{n+1}-1$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n(3)+4^n}{R_n(2)-4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times4^{n+1}-1+4^n}{4^{n+1}+1-4^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times4^n-1}{3\times4^n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3+\left(\frac{1}{4}\right)^n}=3$$

정답 ②

2 급수

p. 41~43

3점 예상	071 ②	072 ②	073 2	074 ⑤	075 ①
4점 예상	076 ③	077 ②	078 ⑤		

071 급수의 합

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

급수가 부분합의 극한임을 이용하여 급수의 합을 묻는 문제를 부분합을 구하는 과정에서 소거되는 규칙을 찾아내어 급수의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2a_{n+1}+a_{n+2})$의 제$n$항까지의 부분합은

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-2a_{k+1}+a_{k+2})=\sum_{k=1}^{n}\{(a_k-a_{k+1})-(a_{k+1}-a_{k+2})\}$$
$$=\{(a_1-a_2)-(a_2-a_3)\}+\{(a_2-a_3)-(a_3-a_4)\}+\cdots+\{(a_n-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_{n+2})\}$$
$$=a_1-a_2-a_{n+1}+a_{n+2}$$
$$=k-\frac{k}{4}-\frac{k}{3n+1}+\frac{k}{3n+4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2a_{n+1}+a_{n+2})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-2a_{k+1}+a_{k+2})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(k-\frac{k}{4}-\frac{k}{3n+1}+\frac{k}{3n+4}\right)$$
$$=\frac{3}{4}k=9$$

따라서 $k=12$

정답 ②

072 등비급수의 합

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

정삼각형의 넓이를 구하여 등비급수의 합을 묻는 문제를 점의 좌표를 이용하여 정사각형을 만들고 그 넓이를 구하여 등비급수의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$\mathrm{A}_n(2^{2n+1},\ 2^{n+1})$, $\mathrm{B}_n(2^{2n+1},\ 0)$이므로

한 변의 길이가 2^{n+1}인 정사각형이 만들어진다.

$S_n=(2^{n+1})^2=4^{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}=\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{12}$$

정답 ②

073 등비급수의 합

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

무한급수가 수렴하는 정수의 개수를 묻는 문제를 무한급수가 수렴하는 모든 정수의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+2)(x^2-4x+3)^{n-1}$이 수렴하기 위해서는

(i) 첫째항 $x+2=0$일 때, $x=-2$

(ii) 공비 $r=x^2-4x+3$이므로

$-1<x^2-4x+3<1$

$$\begin{cases}x^2-4x+4>0\\ x^2-4x+2<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-2)^2>0\\ 2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}\end{cases}$$

$x=1,\ 3$

(i), (ii)에서 $x=-2,\ 1,\ 3$

따라서 정수 x의 합은 $-2+1+3=2$

정답 2

074 등비급수의 합

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

첫째항과 등비급수의 합을 이용하여 짝수 번째 항들의 등비급수의 합을 묻는 문제를 첫째항과 두 번째 항부터 등비급수의 합을 이용하여 홀수 번째 항들의 등비급수의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=9$에서 $\frac{a_2}{1-r}=9$

$\frac{18r}{1-r}=9$

따라서 $r=\frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1}=\frac{a_3}{1-r^2}=\frac{18\times\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2}{\frac{8}{9}}=\frac{9}{4}$$

정답 ⑤

075 급수와 수열의 극한 사이의 관계

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

급수의 수렴을 이용하여 수열의 극한값을 묻는 문제를 수렴하는 극한값의 성질을 이용하여 분수식에서의 수열의 극한값을 묻는 문제로 변형하였다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n-2)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n-2)=0$

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-b_n-2)+2\}=0+2=2$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}-3\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}-3\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}-3\right)+3\right\}=0+3=3$

한편, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-a_n}{a_nb_n}=3$에서 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-\frac{2}{3}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}3(a_n+2)(b_n-2)=\lim_{n\to\infty}\{3a_nb_n-6(a_n-b_n)-12\}$$
$$=3\lim_{n\to\infty}a_nb_n-6\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)-12$$
$$=-26$$

정답 ①

076 급수의 합

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하여 급수의 합을 묻는 문제를 이차방정식의 판별식과 등비수열의 일반항과 부분분수를 이용하여 급수의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

이차방정식 $x^2+2\sqrt{a_n}x+3a_{n+1}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a_n-3a_{n+1}=0$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9이고, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n^2+3n}\times a_n\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2n+3}{n(3n+3)}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3n+3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n\times3^{n-3}}-\frac{1}{(n+1)3^{n-2}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k\times3^{k-3}}-\frac{1}{(k+1)3^{k-2}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1\times3^{-2}}-\frac{1}{2\times3^{-1}}\right)+\left(\frac{1}{2\times3^{-1}}-\frac{1}{3\times3^{0}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n\times3^{n-3}}-\frac{1}{(n+1)\times3^{n-2}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{9-\frac{1}{(n+1)\times3^{n-2}}\right\}=9$$

정답 ③

077 등비급수의 합

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

일정한 비율로 축소되는 사각형을 이용하여 사각형 내의 삼각형 넓이의 무한등비급수의 합을 묻는 문제를 일정한 비율로 축소되는 사각형 내의 새로운 모양을 가지는 도형의 무한등비급수의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

호 A_1C_1와 호 B_1D_1의 교점을 P_1이라 하면, 삼각형 $P_1B_1C_1$은 정삼각형이므로 부채꼴 $C_1D_1P_1$의 중심각은 $30°$이다.

한편 부채꼴 $B_1C_1P_1$의 넓이에서 삼각형 $P_1B_1C_1$을 뺀 넓이는 $\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}$이므로

$S_1=\frac{8}{3}\pi-2\left(\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}\right)=8\left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}\right)$

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 a라면

$\overline{B_1C_2}=\frac{4-a}{2}+a=2+\frac{a}{2}$

$(\overline{B_1D_2})^2=\left(2+\frac{a}{2}\right)^2+a^2$

$16=\frac{5}{4}a^2+2a+4$

$5a^2+8a-48=0$

$(5a-12)(a+4)=0$

따라서 $a=\frac{12}{5}$ $(\because a>0)$

사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비가

$4:\frac{12}{5}=5:3$이므로 넓이의 비는 $25:9$이다.

S_n은 $S_1=8\left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}\right)$이고 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비급수이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{8}{3}(3\sqrt{3}-\pi)}{1-\frac{9}{25}}=\frac{\frac{8}{3}(3\sqrt{3}-\pi)}{\frac{16}{25}}=25\left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\right)$$

정답 ②

078 급수의 합

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

무한급수의 합을 묻는 문제를 수열의 성질과 급수의 성질을 이용하여 무한급수의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=11$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(a_n-a_{n+1})$$
$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(2k+1)(a_k-a_{k+1})$에서

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)(a_k-a_{k+1})$$
$$=3(a_1-a_2)+5(a_2-a_3)+\cdots+(2n+1)(a_n-a_{n+1})$$
$$=a_1+2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-(2n+1)a_{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty}(n+2)a_n=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}(n+3)a_{n+1}=2$이고

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{n+3}(n+3)a_{n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{n+3}\times\lim_{n\to\infty}(n+3)a_{n+1}=2\times2=4$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(a_n-a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(2k+1)(a_k-a_{k+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{a_1+2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-(2n+1)a_{n+1}\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{a_1+2\sum_{k=1}^{n}a_k-(2n+1)a_{n+1}\right\}=1+2\times11-4=19$$

정답 ⑤

3 함수의 극한

p. 44~47

3점 예상	079 ④	080 ⑤	081 ①	082 ⑤	083 ②
	084 ③	085 2			
4점 예상	086 ③	087 10	088 ④	089 ②	

079 좌극한과 우극한

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

주어진 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한의 연산을 만족하는 미지수를 묻는 문제를 극한값의 곱이 존재하는 미지수의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=3$, $\lim_{x\to1+}f(x)=2$

$\lim_{x\to1-}\{g(x+1)-k\}=\lim_{x\to2-}\{g(x)-k\}=1-k$

$\lim_{x\to1+}\{g(x+1)-k\}=\lim_{x\to2+}\{g(x)-k\}=4-k$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)\{g(x+1)-k\}=3(1-k)$

$\lim_{x\to1+}f(x)\{g(x+1)-k\}=2(4-k)$에서

$3(1-k)=2(4-k)$

따라서 $k=-5$

정답 ④

080 함수의 극한에 대한 성질

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

주어진 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한, 함숫값을 묻는 문제를 주어진 그래프에서 좌극한과 함수의 제곱의 우극한, 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to-1-} f(x)=1$, $\lim_{x\to0+}\{f(x)\}^2=4$, $f(2)=3$이므로

따라서 $\lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to0+}\{f(x)\}^2+f(2)=1+4+3=8$

정답 ⑤

081 함수의 극한에 대한 성질

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

함수의 극한값을 묻는 문제를 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$이 되는 조건을 이용하여 다항함수의 극한값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{x}+1\right\}=1$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\left\{\frac{f(x)}{x}+1\right\}-1\right]=1-1=0$

따라서 $f(x)=x^2$

$\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=1$이므로

$\lim_{x\to1} g(x)=0$

$\lim_{x\to1}\frac{2f(x-2)-3g(x)}{f(x+2)+5g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{2f(x-2)}{f(x+2)}=\frac{2}{9}$

정답 ①

082 함수의 극한에 대한 성질

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

함수의 극한값을 묻는 문제를 주어진 조건과 극한에 대한 성질을 이용하여 함수의 극한값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\lim_{x\to2}\{x-f(x)g(x)\}=11$에서

$\lim_{x\to2} f(x)g(x)=-9$

$\lim_{x\to2} f(x)g(x)\times\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2}\{g(x)\}^2=36$

또, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)g(x)}{\frac{g(x)}{f(x)}}=\lim_{x\to2}\{f(x)\}^2=\frac{9}{4}$

$\lim_{x\to2}[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]$

$=\frac{9}{4}-36=-\frac{135}{4}$

정답 ⑤

083 좌극한과 우극한

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

절댓값을 포함한 함수의 좌극한과 우극한을 묻는 문제를 절댓값을 포함한 함수의 좌극한과 우극한이 주어져있을 때 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

(i) $x<a$일 때,

$\lim_{x\to a-}\frac{(x+1)(x-a)}{|x-a|}=\lim_{x\to a-}\frac{(x+1)(x-a)}{-(x-a)}=-a-1$

(ii) $x>a$일 때,

$\lim_{x\to a+}\frac{x-a}{|x-a|}=1$

(i), (ii)에서

$\lim_{x\to a-}\frac{(x+1)(x-a)}{|x-a|}+\lim_{x\to a+}\frac{x-a}{|x-a|}=-a-1+1=4$

따라서 $a=-4$

정답 ②

084 좌극한과 우극한

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

함수의 그래프에서 극한의 조건을 만족하는 집합을 찾고 보기 중에서 옳은 것을 묻는 합답형 문제를 주어진 함수의 그래프에서 극한의 조건을 만족하는 집합의 모든 원소의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

a의 값이 정수이므로 -1, 0, 1, 2에서의 좌극한과 우극한을 비교하면 다음과 같다.

(i) $\lim_{x\to-1-} f(x)=0$, $\lim_{x\to-1+}\{f(x)\}^2=0$이므로 $-1\in A$

(ii) $\lim_{x\to0-} f(x)=1$, $\lim_{x\to0+}\{f(x)\}^2=1$이므로 $0\in A$

(iii) $\lim_{x\to1-} f(x)=2$, $\lim_{x\to1+}\{f(x)\}^2=1$이므로 $1\notin A$

(iv) $\lim_{x\to2-} f(x)=0$, $\lim_{x\to2+}\{f(x)\}^2=0$이므로 $2\in A$

(i)~(iv)에서 $A=\{-1, 0, 2\}$이므로

$-1+0+2=1$

정답 ③

085 함수의 극한값의 계산

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

$\infty-\infty$ 형태의 극한값을 묻는 문제를 분모를 유리화하여 $\infty-\infty$ 형태의 극한값을 유리화하여 극한값을 구한 후 미정계수를 묻는 문제로 변형하였다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+ax}-x)}{2x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+ax}-x)(\sqrt{x^2+ax}+x)}{(2x+1)(\sqrt{x^2+ax}+x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2+ax-x^2)}{(2x+1)(\sqrt{x^2+ax}+x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{(2x+1)(\sqrt{x^2+ax}+x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1\right)}$$

$=\dfrac{a}{2(1+1)}$

$=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a=2$

정답 2

086 함수의 극한값의 계산

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

좌극한과 우극한을 묻는 문제를 x의 범위에 따른 함수와 이차함수의 교점의 개수를 새로운 함수로 만들어서 극한값과 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+2}{2x^{2n-1}+1}$에서

(i) $|x|>1$일 때

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^{2n-1}}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^2+\dfrac{2}{x^{2n-1}}}{2+\dfrac{1}{x^{2n-1}}}=\dfrac{1}{2}x^2$

(ii) $|x|<1$일 때

$\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+2}{2x^{2n-1}+1}=\dfrac{0+2}{0+1}=2$

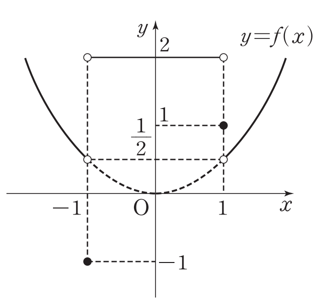
(iii) $x=1$일 때

$f(1)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^{2n+1}+2}{2\times1^{2n-1}+1}=\dfrac{1+2}{2+1}=1$

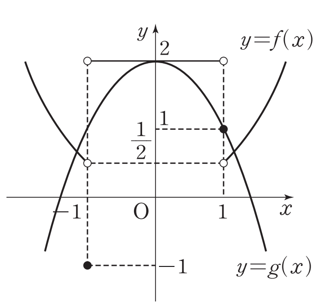
(iv) $x=-1$일 때

$f(-1)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{2n+1}+2}{2(-1)^{2n-1}+1}=\dfrac{-1+2}{-2+1}=-1$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)=-x^2+a$의 그래프는 $a=2$일 때 아래 그림과 같다.



이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 4이므로

$h(2)=4$

$\dfrac{3}{2}<a<2$일 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2

따라서 $\lim_{a\to2-}h(a)+h(2)=2+4=6$

정답 ③

087 함수의 극한에 대한 성질

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

분수꼴의 $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ 형태의 극한의 성질을 이용하여 극한값의 최솟값을 묻는 문제를 같은 형태로 극한값의 성질을 이용하여 각각의 함수의 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{2x^3+x}=1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수임을 알 수 있다.

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=-2$에서 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가져야하므로

$f(x)=2(x-1)^2(x+a)$

따라서 $\lim_{x\to1}\dfrac{2(x-1)^2(x+a)}{(x-1)^2}=2(1+a)=-2$

즉, $a=-2$이므로 $f(x)=2(x-1)^2(x-2)$

$\lim_{x\to0}\dfrac{x}{g(x)}=\dfrac{1}{3}$에서 $x\to0$일 때, (분자) $\to0$이므로 $\lim_{x\to0}\dfrac{x}{g(x)}$이 0이 아닌 값으로 존재하려면 (분모) $\to0$이어야 한다.

즉, $g(0)=0$

$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고 x를 인수로 가지므로

$g(x)=x(x+b)$

$\lim_{x\to0}\dfrac{x}{g(x)}=\lim_{x\to0}\dfrac{x}{x(x+b)}=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x+b}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{3}$

즉, $b=3$이므로

$g(x)=x(x+3)$

따라서 $f(2)+g(2)=0+10=10$

정답 10

088 미정계수의 결정

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

함수의 그래프에서 극한의 성질을 이용하여 다항함수를 구하고 함숫값을 묻는 문제를 같은 형태의 문제로 조건만 다르게 하여 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\lim_{x\to1}\dfrac{g(x)}{f(x+1)}$에서 $x\to1$일 때, (분모) $\to0$이므로 $\lim_{x\to1}\dfrac{g(x)}{f(x+1)}$의 값이 존재하려면 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $g(1)=0$ …… ㉠

$\lim_{x\to0}f(x+1)g(x-1)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to0-}f(x+1)g(x-1)=\lim_{x\to0+}f(x+1)g(x-1)$

즉, $1\times g(-1)=(-1)\times g(-1)$에서

$2g(-1)=0$, $g(-1)=0$ …… ㉡

$\lim_{x\to3} f(x)g(x-1)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to3-} f(x)g(x-1)=\lim_{x\to3+} f(x)g(x-1)$

즉, $1\times g(2)=2\times g(2)$에서

$g(2)=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$g(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$

따라서 $g(3)=4\times2\times1=8$

정답 ④

089 함수의 극한에 대한 성질

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

주어진 조건에 맞는 도형의 넓이를 이용하여 극한값을 묻는 문제를 도형과 곡선이 만나는 좌표를 이용하여 좌표의 차의 극한값을 묻는 문제로 변형하였다.

원 C와 곡선 $y=\frac{1}{tx}$의 교점을 구하기 위해 연립하면

$C: x^2+y^2=4$에서

$x^2+\left(\frac{1}{tx}\right)^2=4$

즉, $x^4-4x^2+\frac{1}{t^2}=0$

이 식의 두 양의 실근이 각각 $f(t)$, $g(t)$이므로

$x^2=A$로 치환하면 $A^2-4A+\frac{1}{t^2}=0$

근과 계수의 관계에 의하여

$\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2=4$, $\{f(t)\}^2\times\{g(t)\}^2=\frac{1}{t^2}$

$|\{f(t)\}^2-\{g(t)\}^2|=\sqrt{4^2-\frac{4}{t^2}}$이므로

$\lim_{t\to\infty}|\{f(t)\}^2-\{g(t)\}^2|=\lim_{t\to\infty}\sqrt{16-\frac{4}{t^2}}=4$

정답 ②

4 함수의 연속

p. 48~50

3점 예상	090 ④	091 5	092 ⑤
4점 예상	093 6	094 20	095 ④

090 구간에서의 연속

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

주기 성질을 갖는 함수가 연속이 되기 위한 미정계수를 묻는 문제를 주기 성질 대신 구간을 세분화하여 함수가 연속이 되기 위한 미정계수를 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=a$, $x=b$에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$

$\lim_{x\to a-} 1=\lim_{x\to a+}(x^2-4x+5)=a^2-4a+5$

$a^2-4a+5=1$, $a^2-4a+4=0$, $(a-2)^2=0$ 따라서 $a=2$

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이므로 $\lim_{x\to b-} f(x)=\lim_{x\to b+} f(x)=f(b)$

$\lim_{x\to b-}(x^2-4x+5)=\lim_{x\to b+}(x+1)=b+1$

$b^2-4b+5=b+1$, $b^2-5b+4=0$, $(b-1)(b-4)=0$

따라서 $b=1$ 또는 $b=4$

$a<b$이므로 $b=4$

따라서 $a+b=6$

정답 ④

091 연속함수의 성질

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

연속함수의 성질을 이용하여 두 함수의 곱이 연속일 때 미정계수를 구하여 함숫값을 묻는 문제를 함수의 연속의 정의를 이용하여 다항함수의 미정계수를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)$는 $x=1$을 제외한 실수에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$은 $x=1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이 된다.

즉, $\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(1)}{f(1)}$

이때 $\lim_{x\to1} f(x)=0$이므로 $g(1)=0$

$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{f(x)}=0$

$g(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$이므로

따라서 $b^2+c^2=(-2)^2+1^2=5$

정답 5

092 함수의 연속성

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

이차방정식의 판별식을 이용하여 만든 함수와 일차식의 곱이 모든 실수에서 연속이 되는 미정계수를 묻는 문제를 이차방정식의 판별식을 이용하여 만든 함수와 이차식의 곱이 모든 실수에서 연속이 되는 미정계수를 묻는 문제로 변형하였다.

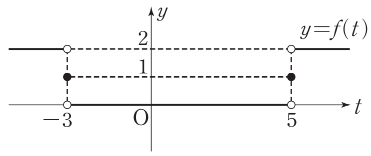
x에 대한 이차방정식 $x^2-2tx+2t+15=0$의 판별식을 $\frac{D}{4}$라 하면

$\frac{D}{4}=t^2-2t-15=(t+3)(t-5)$이므로

$\frac{D}{4}>0$, 즉 $t<-3$ 또는 $t>5$일 때 $f(t)=2$

$\frac{D}{4}=0$, 즉 $t=-3$ 또는 $t=5$일 때 $f(t)=1$

$\frac{D}{4}<0$, 즉 $-3<t<5$일 때 $f(t)=0$



즉, 함수 $f(t)$는 $t=-3$ 또는 $t=5$에서만 불연속이므로 $(t^2+at+b)f(t)$가 $t=-3$, $t=5$에서 모두 연속이면 모든 실수 t에서 연속이다.

$g(t)=t^2+at+b$라 하면

$\lim_{t\to -3-} g(t)f(t)=\lim_{t\to -3+} g(t)f(t)=g(-3)f(-3)$이고

$\lim_{t\to 5-} g(t)f(t)=\lim_{t\to 5+} g(t)f(t)=g(5)f(5)$이어야 하므로

$g(t)=t^2-2t-15$

따라서 $a=-2$, $b=-15$이므로 $ab=30$

정답 ⑤

093 구간에서의 연속

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

범위에 따라 함수의 극한을 구하고 함수의 연속성 등에 관한 것을 묻는 합답형 문제를 두 함수의 곱이 연속함수가 될 수 있는 미정계수를 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)=\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \dfrac{-x^{n+1}+1}{x^n+1} & (x\neq -1) \\ 0 & (x=-1) \end{cases}$에서

(i) $|x|>1$일 때

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} \frac{-x+\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=-x$$

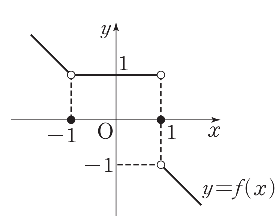
(ii) $|x|<1$일 때

$\lim_{n\to\infty} x^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} \frac{-x^{n+1}+1}{x^n+1}=\frac{0+1}{0+1}=1$$

(iii) $x=1$일 때

$$f(1)=\lim_{n\to\infty} \frac{-(1)^{n+1}+1}{(1)^n+1}=\frac{-1+1}{1+1}=0$$



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(x)=x^2+ax+b$에서

(i) $f(1)g(1)=0$

$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=-1(1+a+b)=-(1+a+b)$

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=1(1+a+b)=1+a+b$

이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$1+a+b=0$ …… ㉠

(ii) $f(-1)g(-1)=0$

$\lim_{x\to -1+} f(x)g(x)=1(1-a+b)=1-a+b$

$\lim_{x\to -1-} f(x)g(x)=1(1-a+b)=1-a+b$

이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$1-a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=0$, $b=-1$이므로

$g(x)=x^2-1$

따라서 $f(-2)g(2)=2\times 3=6$

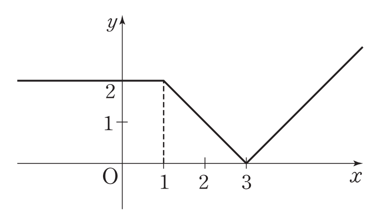
정답 6

094 함수의 연속

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

두 그래프가 만나는 점의 개수를 이용하여 함수와 이차함수가 실수 전체에서 연속일 때 함숫값들의 곱을 묻는 문제를 같은 형태의 문제로 절댓값이 들어 있는 함수와 이차함수의 곱이 실수 전체에서 연속일 때 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $y=\begin{cases} |x-3| & (x\geq 1) \\ 2 & (x<1) \end{cases}$의 그래프는오른쪽 그림과 같다.



(i) $m\leq 0$일 때

함수

$y=\begin{cases} |x-3| & (x\geq 1) \\ 2 & (x<1) \end{cases}$의

그래프와 직선 $y=mx$가 만나는 점의 개수는 1

(ii) $0<m<1$일 때

함수 $y=\begin{cases} |x-3| & (x\geq 1) \\ 2 & (x<1) \end{cases}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 만나는 점의 개수는 2

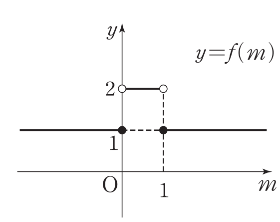
(iii) $m\geq 1$일 때

함수 $y=\begin{cases} |x-3| & (x\geq 1) \\ 2 & (x<1) \end{cases}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 만나는 점의 개수는 1

따라서

$f(m)=\begin{cases} 1 & (m\leq 0) \\ 2 & (0<m<1) \\ 1 & (m\geq 1) \end{cases}$이고,

함수 $y=f(m)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $f(m)$은 $x=0$, $x=1$에서 불연속이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=f(0)g(0)$에서

$1\times b=2\times b$, $b=0$

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=f(1)g(1)$에서

$2\times(1+a+b)=1\times(1+a+b)$

$1+a+b=0$

$a=-1$

따라서 $g(x)=x^2-x$이고 $g(5)=5^2-5=20$

정답 20

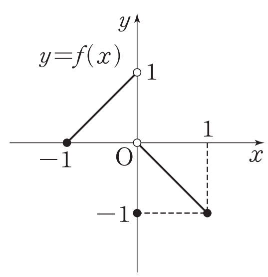
095 연속함수의 성질

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

불연속함수의 대칭, 연산 등을 이용하여 연속에 관한 성질을 묻는 합답형 문제를 같은 유형으로 그래프를 변형하여 성질을 묻는 합답형 문제로 변형하였다.

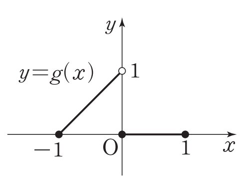
$-1\le x<0$일 때, $f(x)\ge0$이고

$0\le x\le1$일 때, $f(x)<0$이므로

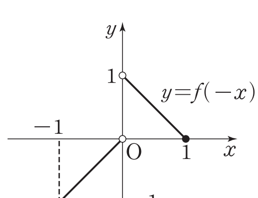


$$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}=\begin{cases}\dfrac{f(x)+f(x)}{2} & (-1\le x<0)\\ \dfrac{f(x)-f(x)}{2} & (0\le x\le1)\end{cases}$$

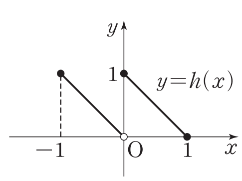
따라서 $g(x)=\begin{cases}f(x) & (-1\le x<0)\\ 0 & (0\le x\le1)\end{cases}$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, $y=f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축 대칭이동한 것과 같으므로 [그림 1]과 같고, $h(x)=|f(-x)|$이므로 $y=h(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



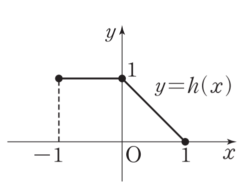
[그림 1]



[그림 2]

ㄱ. $\lim_{x\to0+} g(x)=0$, $\lim_{x\to0-} g(x)=1$이므로 $\lim_{x\to0} g(x)$는 존재하지 않는다. (거짓)

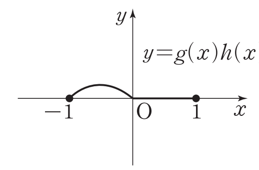
ㄴ. 함수 $g(x)+h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\lim_{x\to0}\{g(x)+h(x)\}=g(0)+h(0)$이므로

함수 $g(x)+h(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $g(x)h(x)$의 그래프는 오른쪽과 같다.



두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 모두 $x=0$을 제외한 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 연속이므로 함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 연속이면 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 연속이다.

이때 $g(0)h(0)=0$이고

$\lim_{x\to0+} g(x)h(x)=\lim_{x\to0+} g(x)\times\lim_{x\to0+} h(x)=0\times1=0$

$\lim_{x\to0-} g(x)h(x)=\lim_{x\to0-} g(x)\times\lim_{x\to0-} h(x)=1\times0=0$에서

$\lim_{x\to0} g(x)h(x)=g(0)h(0)$이므로

함수 $g(x)h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)h(x)$는 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답 ④

5 미분계수와 도함수

p. 51~53

3점 예상	096 ②	097 ②	098 ③	099 528	100 ②
	101 39				
4점 예상	102 ④	103 ②	104 50	105 25	

096 미분법

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 묻는 문제를 곱의 미분과 조건을 이용하여 미분계수를 묻는 문제로 변형하였다.

조건 (가)에서 $x=1$을 대입하면 $g(1)=f(1)$ …… ㉠

조건 (가)에서 양변을 x에 대해 미분하면

$g'(x)=(3x^2-4x)f(x)+(x^3-2x^2+2)f'(x)$

$x=1$을 대입하면 $g'(1)=-f(1)+f'(1)$

㉠에 의해 $f'(1)=g'(1)+f(1)=g'(1)+g(1)$

조건 (나)에서 $g'(1)+g(1)=25$이므로

따라서 $f'(1)=25$

정답 ②

097 미분계수와 미분법

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

극한으로 주어진 식에서 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 묻는 문제를 극한으로 주어진 식을 극한의 성질과 미분계수의 정의를 활용하여 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\lim_{x\to -2}\frac{(x+4)f(x)-12}{x+2}=1$

에서 $x\to -2$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to -2}\{(x+4)f(x)-12\}=0$

$2f(-2)-12=0$, $f(-2)=6$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{(x+4)f(x)-12}{x+2}&=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)f(x)+2\{f(x)-6\}}{x+2}\\&=\lim_{x\to -2}\left\{f(x)+2\times\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\right\}\\&=f(-2)+2f'(-2)=1\end{aligned}$$

$f'(-2)=-\frac{5}{2}$

또한 이차함수 $f(x)$가 원점을 지나므로

$f(x)=ax^2+bx$라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(-2)=6$이므로 $4a-2b=6$

$f'(-2)=-\frac{5}{2}$이므로 $-4a+b=-\frac{5}{2}$

이를 연립하면 $a=-\frac{1}{4}$, $b=-\frac{7}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^2-\frac{7}{2}x$이고 $f(-4)=10$

정답 ②

098 평균변화율

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

다항함수의 평균변화율을 만족하는 미지수를 묻는 문제를 평균변화율이 정해진 함수의 범위를 만족하는 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)=x^3-2x$에서 x의 값이 a에서 $a+2$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(a+2)-f(a)}{(a+2)-a}&=\frac{(a+2)^3-2(a+2)-(a^3-2a)}{2}\\&=\frac{6a^2+12a+4}{2}\\&=3a^2+6a+2=47\end{aligned}$$

이므로 $3a^2+6a-45=0$, $a^2+2a-15=0$, $(a-3)(a+5)=0$

에서 $a=-5$ 또는 $a=3$

$a>0$이므로 $a=3$

정답 ③

099 미분법

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

극한으로 주어진 식에서 함숫값과 미분계수를 이용하여 두 함수의 곱의 미분법을 이용한 미분계수를 묻는 문제를 조건을 만족하는 다항함수를 찾아서 함숫값과 미분계수의 곱을 묻는 문제로 변형하였다.

조건 (가)에서 다항함수 $f(x)$의 최고차항은 $3x^2$

조건 (나)에서 $x\to -2$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$

$\lim_{x\to -2}f(x)=0$

함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $f(-2)=0$

$f(x)=(x+2)(3x+a)$라 하면

조건 (나)에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2+2x}&=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(3x+a)}{x(x+2)}\\&=\lim_{x\to -2}\frac{3x+a}{x}\\&=3-\frac{a}{2}=7\end{aligned}$$

$a=-8$이므로

$f(x)=(x+2)(3x-8)=3x^2-2x-16$

$f'(x)=6x-2$

따라서 $f(4)\times f'(4)=24\times 22=528$

정답 528

100 미분법

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

주어진 조건을 만족하는 다항함수의 미분계수를 묻는 문제를 조건을 만족하는 다항함수의 미분계수의 비를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(0)=f(2)=f(3)=k$ (단, k는 상수)라 하면

삼차방정식 $f(x)-k=0$의 세 실근이 0, 2, 3이므로

$f(x)-k=ax(x-2)(x-3)$

즉, $f(x)=ax(x-2)(x-3)+k$ (단, a, k는 상수)

$f'(x)=a\{(x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2)\}$

$f'(0)=a\times(-2)\times(-3)=6a$, $f'(2)=a\times 2\times(-1)=-2a$

따라서 $\frac{f'(0)}{f'(2)}=\frac{6a}{-2a}=-3$

정답 ②

101 미분법

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

함수와 도함수의 관계식을 활용하여 함숫값을 묻는 문제를 다항함수의 차수를 지정해주고 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)f'(x)-2f(x)+f'(x)=2x^3+7x^2+3x+2$

$f(x)f'(x)-2f(x)+f'(x)-2=2x^3+7x^2+3x$

$(f(x)+1)(f'(x)-2)=x(x+3)(2x+1)$ …… ㉠

$f(x)+1$은 이차식이고, $f'(x)-2$는 일차식이다.

$f(x)$의 최고차항을 ax^2이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 $2ax$ $(a>0)$

㉠의 식에서 최고차항을 비교하면

$2a^2x^3=2x^3$, $a^2=1$

$a>0$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)+1=x(x+3)$, $f'(x)-2=2x+1$

$f(x)=x^2+3x-1$

따라서 $f(5)=39$

정답 39

102 미분가능과 연속

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

특정한 점에서 미분가능하기 위한 조건을 묻는 문제를 어떤 한 점에서는 미분가능하도록, 다른 한 점에서는 미분불가능하도록 하는 미지수의 합의 최댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)=-1-a+b$, $\lim\limits_{x\to-1+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+}(-x^2+bx+4)=-b+3$

에서 $-1-a+b=-b+3$, $-a+2b=4$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=b+3$, $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(ax-b+7)=a-b+7$

에서 $b+3=a-b+7$, $-a+2b=4$

(ⅰ) $x=-1$에서 미분가능하려면

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{(x^3+ax+b)-(-1-a+b)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{x^3+1+a(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1-}(x^2-x+1+a)=a+3$$

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{(-x^2+bx+4)-(-1-a+b)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{-x^2+bx+a-b+5}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{-x^2+bx+b+1}{x+1}\ (\because ㉠\text{에 의해})=\lim_{x\to-1+}\frac{-x^2+1+b(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1+}(-x+1+b)=b+2$$

이므로 $a+3=b+2$, $a-b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $a=2$, $b=3$

(ⅱ) $x=1$에서 미분가능하려면

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(-x^2+bx+4)-(b+3)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-x^2+1+bx-b}{x-1}=\lim_{x\to1-}(-x-1+b)=b-2$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(ax-b+7)-(b+3)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{ax-2b+4}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{ax-a}{x-1}=a\ (\because ㉠\text{에 의해})$$

이므로 $b-2=a$, $a-b=-2$ …… ㉢

㉠, ㉢에 의해 $a=0$, $b=2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 오직 한 점에서만 미분가능하지 않은 (a, b)는 $(2, 3)$, $(0, 2)$이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 5

정답 ④

103 미분법

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

다항식의 나눗셈과 곱의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 묻는 문제를 다항식의 나눗셈을 이용하여 접선의 기울기를 묻는 문제로 변형하였다.

$xf(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$xf(x)=(x-1)^2Q(x)+4x-4$

$\quad=(x-1)\{(x-1)Q(x)+4\}$

$f(x)$가 $(x-1)$을 인수로 가져야하므로

$f(x)=(x-1)g(x)$라 하면

$f'(x)=g(x)+(x-1)g'(x)$

$f'(1)=g(1)$

한편, $f(x)=(x-1)g(x)$이므로

$xf(x)=x(x-1)g(x)=(x-1)\{(x-1)Q(x)+4\}$

$xg(x)=(x-1)Q(x)+4$

$g(1)=4$

따라서 $f'(1)=g(1)=4$

정답 ②

104 미분가능과 연속

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

좌미분계수와 우미분계수 사이의 관계식이 주어졌을 때 미지수를 묻는 문제를 좌미분계수와 우미분계수의 차가 주어졌을 때 미지수의 제곱의 합의 최댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

실수 t에 대하여 $g(t)$는 함수 $f(x)$의 $x=t$에서 미분계수이므로

$$g(t)=\begin{cases}3t^2-2at & (t<a)\\ 6t-3a & (t>a)\end{cases}$$

$b\neq a$일 때, 함수 $g(t)$는 $t=b$에서 연속이므로

$\lim\limits_{t\to b-} g(t)-\lim\limits_{t\to b+} g(t)=0$

$\lim\limits_{t\to b-} g(t)-\lim\limits_{t\to b+} g(t)=10$을 만족시키려면 $b=a$

$\lim\limits_{t\to b-} g(t)=\lim\limits_{t\to b-}(3t^2-2at)=3b^2-2ab=b^2$

$\lim\limits_{t\to b+} g(t)=\lim\limits_{t\to b+}(6t-3a)=6b-3a=3b$

따라서 $b^2-3b=10$, $b^2-3b-10=0$, $(b-5)(b+2)=0$

$b=-2$ 또는 $b=5$

$a^2+b^2=2b^2$이므로 최댓값은 $b=5$일 때 $2\times5^2=50$

정답 50

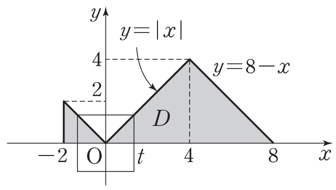
105 미분가능과 연속

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

도형에서 공통부분의 넓이를 나타낸 식이 미분가능하지 않은 점을 묻는 문제를 공통부분의 넓이를 나타낸 식이 미분가능하지 않은 점과 미분계수가 정해진 상수의 최댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

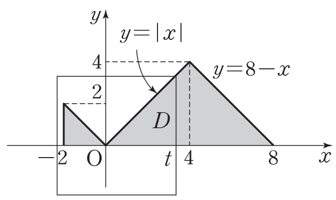
연립부등식 $|x|\le t$, $|y|\le t$가 나타내는 영역은 (t, t), $(t, -t)$, $(-t, -t)$, $(-t, t)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형의 내부 또는 경계선이다.

(ⅰ) $0<t\le2$일 때



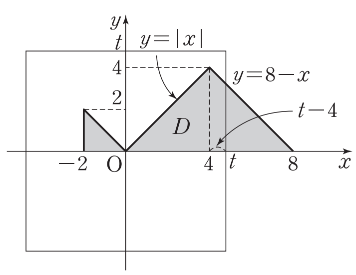
$f(t)=2\times\dfrac{1}{2}t^2=t^2$

(ii) $2<t\le4$일 때



$f(t)=\dfrac{1}{2}\times2\times2+\dfrac{1}{2}t^2=\dfrac{1}{2}t^2+2$

(iii) $4<t\le8$일 때



$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}(4+8-t)(t-4)\\&=10+\frac{1}{2}(12-t)(t-4)\\&=-\frac{1}{2}t^2+8t-14\end{aligned}$$

(iv) $t>8$일 때

$f(t)=2+\dfrac{1}{2}\times8\times4=18$

(i)~(iv)에 의하여

$$f(t)=\begin{cases}t^2 & (0<t\le2)\\ \dfrac{1}{2}t^2+2 & (2<t\le4)\\ -\dfrac{1}{2}t^2+8t-14 & (4<t\le8)\\ 18 & (t>8)\end{cases}$$

$t>0$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $f(t)$는 연속이다.

$$f'(t)=\begin{cases}2t & (0<t<2)\\ t & (2<t<4)\\ -t+8 & (4<t<8)\\ 0 & (t>8)\end{cases}$$

이므로 함수 $f(t)$는 $0<t<2$ 또는 $2<t<4$ 또는 $4<t<8$ 또는 $t>8$에서 미분가능하다.

$$\lim_{t\to2-}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\lim_{t\to2-}\frac{t^2-4}{t-2}=\lim_{t\to2-}\frac{(t-2)(t+2)}{t-2}=\lim_{t\to2-}(t+2)=4$$

$$\lim_{t\to2+}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\lim_{t\to2+}\frac{\left(\frac{1}{2}t^2+2\right)-4}{t-2}=\lim_{t\to2+}\frac{t^2-4}{2(t-2)}=\lim_{t\to2+}\frac{t+2}{2}=2$$

에서 $\displaystyle\lim_{t\to2-}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}\ne\lim_{t\to2+}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}$이므로

함수 $f(t)$는 $t=2$에서 미분가능하지 않다.

$$\lim_{t\to4-}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}=\lim_{t\to4-}\frac{\left(\frac{1}{2}t^2+2\right)-10}{t-4}=\lim_{t\to4-}\frac{t^2-16}{2(t-4)}=\lim_{t\to4-}\frac{(t-4)(t+4)}{2(t-4)}=\lim_{t\to4-}\frac{t+4}{2}=4$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to4+}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}&=\lim_{t\to4+}\frac{\left(-\frac{1}{2}t^2+8t-14\right)-10}{t-4}\\&=\lim_{t\to4+}\frac{-t^2+16t-48}{2(t-4)}=\lim_{t\to4+}\frac{-(t-4)(t-12)}{2(t-4)}\\&=\lim_{t\to4+}\frac{-(t-12)}{2}=4\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{t\to4-}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}=\lim_{t\to4+}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}$이므로

함수 $f(t)$는 $t=4$에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to8-}\frac{f(t)-f(8)}{t-8}&=\lim_{t\to8-}\frac{\left(-\frac{1}{2}t^2+8t-14\right)-18}{t-8}\\&=\lim_{t\to8-}\frac{-t^2+16t-64}{2(t-8)}=\lim_{t\to8-}\frac{-(t-8)^2}{2(t-8)}\\&=\lim_{t\to8-}\frac{-(t-8)}{2}=0\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to8+}\frac{f(t)-f(8)}{t-8}=\lim_{t\to8+}\frac{18-18}{t-8}=0$$

$\displaystyle\lim_{t\to8-}\frac{f(t)-f(8)}{t-8}=\lim_{t\to8+}\frac{f(t)-f(8)}{t-8}$이므로

함수 $f(t)$는 $t=8$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(t)$는 $t=2$에서만 미분가능하지 않으므로 $a=2$

$$f'(t)=\begin{cases}2t & (0<t<2)\\ t & (2<t<4)\\ -t+8 & (4<t<8)\\ 0 & (t>8)\end{cases},\ f'(4)=4,\ f'(8)=0$$

이고, 또한 조건 (나)에서 $f'(t)=3$을 만족시키는 경우는

$0<t<2$일 때, $2t=3$에서 $t=\dfrac{3}{2}$

$2<t<4$일 때, $t=3$에서 $t=3$

$4<t<8$일 때, $-t+8=3$에서 $t=5$

$f'(t)=3$을 만족하는 $t=\dfrac{3}{2}$, 3, 5

따라서 t의 최댓값은 5이므로 $b=5$

$10a+b=25$

정답 25

6 도함수의 활용

p. 54~57

3점 예상	106 ⑤	107 ①	108 ①	109 ④	110 ③
4점 예상	111 ④	112 40	113 225	114 ⑤	115 ①

106 접선의 방정식

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

기울기가 주어졌을 때 접선의 방정식을 묻는 문제를 직선을 x축, y축으로 각각 평행이동했을 때 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=x^3-6x$에서
$f'(x)=3x^2-6$이므로
$3x^2-6=6$
$x^2=4$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ 4)$와 점 $(2,\ -4)$에서 접선의 기울기가 6이므로
점 $(-2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은
$y-4=6(x+2)$, $y=6x+16$
점 $(2,\ -4)$에서의 접선의 방정식은
$y+4=6(x-2)$, $y=6x-16$
직선 $y=6x$를 x축 방향으로 a만큼 평행이동해서 곡선 $y=f(x)$에 접하려면
점 $(2,\ -4)$를 지나야 하므로 $(\because a>0)$
$y=6(x-a)=6x-16$, $a=\dfrac{8}{3}$
직선 $y=6x$를 y축 방향으로 b만큼 평행이동해서 곡선 $y=f(x)$에 접하려면
점 $(-2,\ 4)$를 지나야 하므로 $(\because b>0)$
$y=6x+b=6x+16$, $b=16$
따라서 $a+b=\dfrac{8}{3}+16=\dfrac{56}{3}$

정답 ⑤

107 함수의 그래프와 최대, 최소

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

두 다항함수가 한 점에서 만나기 위한 미지수를 묻는 문제를 최고차항의 차수가 더 큰 두 다항함수가 한 점에서 만나기 위한 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)=x^4-3x-a$의 그래프가 함수 $g(x)=-x^2+3x+a$의 그래프와 만나는 점의 개수는 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근의 개수와 같다.
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$$\begin{aligned}h'(x)&=f'(x)-g'(x)\\&=(4x^3-3)-(-2x+3)\\&=4x^3+2x-6\\&=2(x-1)(2x^2+2x+3)\end{aligned}$$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $2x^2+2x+3=0$의 판별식 $D<0$이므로 실근을 갖지 않는다.)
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $h(1)$
방정식 $h(x)=0$이 단 하나의 실근을 가져야 하므로 $h(1)=0$
$f(1)-g(1)=0$이므로
$a=-2$

정답 ①

108 속도와 가속도

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

위치로 주어진 함수가 운동방향이 바뀌는 순간들의 차가 주어졌을 때 미지수를 묻는 문제를 처음과 반대방향으로 움직이는 시간을 알 때 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

$x=t^3-kt^2+84t+10$에서
속도 $v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-2kt+84$
t가 a초에서 b초까지 처음의 출발 방향과 반대 방향으로 움직인다고 하면
$t=a$와 $t=b$에서의 속도는 0, $b-a=3$이므로
$3t^2-2kt+84=0$의 두 양의 실근이 a, b이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$a+b=\dfrac{2k}{3}>0$, $ab=28$
$(b-a)^2=(a+b)^2-4ab$
$9=\dfrac{4k^2}{9}-112$에서
$k^2=\dfrac{9}{4}\times 121$
$k>0$이므로 $k=\dfrac{33}{2}$

정답 ①

109 평균값 정리

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

평균값 정리를 만족하는 임의의 점 c를 묻는 문제를 롤의 정리를 만족하는 임의의 점 c를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=x^4-4x^2+2$에서
$f'(x)=4x^3-8x$
함수 $f(x)=x^4-4x^2+2$는 닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하며, $f(0)=f(2)=2$이므로
$f'(c)=4c^3-8c=0$
$4c(c^2-2)=0$
$0<c<2$를 만족시키는 $c=\sqrt{2}$

정답 ④

110 부등식에의 활용

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

부등식을 미분을 활용하여 증명하는 과정에서 나오는 상수를 묻는 문제를 같은 유형으로 증명하는 과정에서 나오는 식을 함수로 하는 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=2x^4-9x^2+5$라 하면

$f'(x)=8x^3-18x=2x(2x+3)(2x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	5	↘	극소	↗

$x\geq 2$일 때 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=32-36+5=1$

$x\geq 2$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=2x^4-9x^2+5\geq 1\geq 0$

따라서 $a\times g(2)+b=\frac{3}{2}\times 28+1=43$ 정답 ③

111 방정식에의 활용

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

사차함수를 미분을 이용하여 그래프를 보고 실근의 개수 등을 묻는 문제를 같은 사차함수에 대해서 실근의 개수와 실근의 합 등을 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=x^4+2x^3+1$에서

ㄱ. $f(-1)=(-1)^4+2\times(-1)^3+1=0$ (참)

ㄴ. $f'(x)=4x^3+6x^2=2x^2(2x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{11}{16}$	↗	1	↗

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고

$f(-2)=1>0$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{11}{16}<0$

이므로 방정식 $f(x)=0$의 한 실근은 -2와 $-\frac{3}{2}$ 사이에 있고, 또 다른 한 근은 -1이므로 서로 다른 모든 실근의 합은 -3보다 크고 $-\frac{5}{2}$보다 작다. (거짓)

ㄷ. 사차함수 $f(x)$가 극솟값만 가지고 x축과 두 점에서 만나므로 양수 a에 대하여 방정식 $f(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답 ④

112 함수의 극대와 극소

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

주어진 조건을 만족하는 삼차함수를 구한 후 극솟값을 묻는 문제를 주어진 조건을 만족하는 삼차함수를 구한 후 극댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

삼차방정식 $f(x)-12x=0$은 적어도 하나의 실근을 가지므로

방정식 $f(x)-12x=0$의 한 실근을 a라 하자.

조건 (가)에서

함수 $|f(x)-12x|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$f(x)-12x=\pm(x-a)^3$이어야 한다.

조건 (나)에서

$x>2$일 때, $f(x)-12x<0$이고,

$x<2$일 때, $f(x)-12x>0$이므로

$f(x)=-(x-a)^3+12x$ ⋯⋯ ㉠

함수 $f(x)-12x$는 연속함수이므로 $x=2$일 때 $f(2)-12\times 2=0$

㉠에서 $-(2-a)^3+24-24=0$, $a=2$

$f(x)=-(x-2)^3+12x=-x^3+6x^2+8$

$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(4)=40$

정답 40

113 함수의 최대와 최소

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

닫힌 구간에서 삼차함수의 최댓값과 최솟값의 차와 다른 조건들을 이용하여 미지수를 묻는 문제를 같은 삼차함수에 대해서 비슷한 조건을 주고 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=x^3-3ax^2+2(1\leq a\leq 4)$에서

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$

$1\leq a\leq 4$이므로 $2\leq 2a\leq 8$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	극소	↗

닫힌 구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하기 위해서는

(i) $2\leq 2a\leq 4$일 때, 즉 $1\leq a\leq 2$일 때

최댓값은 $f(0)=2$ 또는 $f(4)=66-48a$

최솟값은 $f(2a)=-4a^3+2$

① 최댓값이 $f(0)=2$인 경우

$2\geq 66-48a$이므로 $\frac{4}{3}\leq a\leq 2$

$2-(-4a^3+2)=44$, $a^3=11$이고 $\frac{4}{3}\leq a\leq 2$에서 만족하는 실수 a는 존재하지 않는다.

② 최댓값이 $f(4)=66-48a$인 경우

$2\leq 66-48a$이므로 $1\leq a\leq\frac{4}{3}$

$(66-48a)-(-4a^3+2)=44$

$a^3-12a+5=0$

$g(a)=a^3-12a+5$라 하면

$g'(a)=3a^2-12=3(a+2)(a-2)$

함수 $g(a)$는 닫힌 구간 $\left[1, \frac{4}{3}\right]$에서 감소하고 $g(1)=-6$이므로

함수 $g(a)$는 닫힌 구간 $\left[1, \frac{4}{3}\right]$에서 실근을 갖지 않는다.

(ii) $4<2a\le 8$일 때, 즉 $2<a\le 4$일 때

최댓값은 $f(0)=2$

최솟값은 $f(4)=66-48a$

$2-(66-48a)=48a-64=44$

$a=\frac{9}{4}$이고, $2<\frac{9}{4}\le 4$이므로 조건을 만족한다.

(i), (ii)에 의해 $a=\frac{9}{4}$이고 $100a=225$

정답 225

114 함수의 최대와 최소

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

이차함수와 일차함수로 둘러싸인 도형의 넓이가 최댓값을 가지는 미지수를 묻는 문제를 이차함수와 두 상수함수의 교점으로 이루어진 삼각형의 넓이의 제곱이 최대일 때 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

선분 AB의 길이는 $-x^2+24=a$의 두 근의 차와 같다.

$x=\pm\sqrt{24-a}$이므로 $\overline{AB}=2\sqrt{24-a}$

삼각형 ABC의 넓이 $S=\frac{1}{2}\times 2a\times 2\sqrt{24-a}=2a\sqrt{24-a}$

$S^2=f(a)$라 하면

$f(a)=4a^2(24-a)\ (0<a<24)$

$f'(a)=4(48a-3a^2)=12a(16-a)$

$f'(a)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=16$

함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	16	$\cdots$	24
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	극대	↘	

$0<a<24$에서 함수 $f(a)$는 $a=16$에서 극대이면서 최댓값을 갖는다.

정답 ⑤

115 부등식에의 활용

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

삼차함수가 주어진 범위에서 최솟값이 0 이상이 되는 미지수의 최댓값을 묻는 문제를 사차함수가 주어진 범위에서 항상 성립하는 절대부등식이 되는 미지수의 최댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=x^4-2a^2x^2+2$라 하면

$f'(x)=4x^3-4a^2x=4x(x-a)(x+a)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=a$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

(i) $0<a<2$인 경우

$x\ge 2$에서 $f(x)$의 최솟값은 $x=2$일 때이다.

$f(2)\ge 0$

$16-8a^2+2\ge 0$, $8a^2\le 18$, $a^2\le\frac{9}{4}$

$0<a\le\frac{3}{2}$

(ii) $a\ge 2$인 경우

$x\ge 2$에서 $f(x)$의 최솟값은 $x=a$일 때이다.

$f(a)\ge 0$

$a^4-2a^4+2\ge 0$, $a^4\le 2$

이를 만족시키는 양수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의해 a의 최댓값은 $\frac{3}{2}$

정답 ①

7 부정적분과 정적분

p. 58~61

3점 예상	116 ①	117 53	118 ②	119 ①	120 ③
	121 ③				
4점 예상	122 20	123 ④	124 45	125 15	

116 부정적분과 미분의 관계

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

부정적분과 함숫값 조건을 이용하여 함수를 구한 후 함숫값을 묻는 문제를 극솟값 조건까지 추가하여 함수를 구한 후 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\frac{d}{dx}\{f'(x)+x^2\}=8x+4$에서

$f'(x)+x^2=4x^2+4x+C_1$

$f'(x)=3x^2+4x+C_1$ (C_1는 적분상수)

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극솟값이 2이므로

$f'(0)=C_1=0$

$f'(x)=3x^2+4x$

$\int f'(x)dx=\int(3x^2+4x)dx$

$f(x)=x^3+2x^2+C_2$ (C_2는 적분상수)

$f(0)=C_2=2$

$f(x)=x^3+2x^2+2$

따라서 $f(2)=18$

정답 ①

117 정적분과 미분의 관계

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

정적분과 미분의 관계를 이용하여 함수를 구한 후 함숫값을 묻는 문제를 정적분에 안에 x를 포함하도록 식을 주고 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\int_0^1 f(t)dt=a$라 하면

$f(x)+ax=2x^3$

$f(x)=2x^3-ax$

$a=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (2t^3-at)dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^4-\frac{a}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{a}{2}$

$\frac{3}{2}a=\frac{1}{2}$에서 $a=\frac{1}{3}$이므로

$f(x)=2x^3-\frac{1}{3}x$

따라서 $f(3)=53$

정답 53

118 정적분과 급수의 관계

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

그래프를 활용하여 무한급수를 정적분으로 바꾼 후 연산을 묻는 문제를 같은 정적분으로 고치는 과정에서 계수 부분을 주의하도록 하면서 연산을 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)$가 삼차함수이고 $x=2$에서 극솟값이 0이므로

$f(x)=a(x+1)(x-2)^2$라 하면

$f(0)=6$에서 $6=4a$, $a=\frac{3}{2}$이므로

$f(x)=\frac{3}{2}(x+1)(x-2)^2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}f'\left(-1+\frac{2k}{n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f'\left(-1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$

$=2\int_{-1}^{1}f'(x)dx$

$=2\left[f(x)\right]_{-1}^{1}$

$=2\{f(1)-f(-1)\}$

$=2(3-0)=6$

정답 ②

119 정적분과 미분의 관계

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

정적분과 미분의 관계를 활용하여 함수의 정적분 값을 묻는 문제를 정적분과 미분의 관계를 활용하면서 원점대칭함수와 y축대칭함수의 성질을 이용하여 정적분 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\int_2^x f(t)dt=x^4+ax-4$에 $x=2$를 대입하면

$\int_2^2 f(t)dt=16+2a-4$, $0=12+2a$이므로

$a=-6$

$\int_2^x f(t)dt=x^4-6x-4$의 양변을 x에 대해 미분하면

$f(x)=4x^3-6$

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(4x^3-6)dx=\int_{-1}^{1}(-6)dx$

$=-2\int_0^1 6dx=-2\times\left[6x\right]_0^1=-12$

정답 ①

120 정적분과 급수

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

무한급수를 정적분으로 바꾼 후 연산하여 미지수를 묻는 문제를 그래프를 활용하여 무한급수를 정적분으로 바꾼 후 연산하여 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

이차함수 $f(x)$가 $f(-a)=f(2a)=0$이므로

$f(x)=b(x+a)(x-2a)(b<0)$으로 놓을 수 있다.

또 $f(0)=2a$이므로

$ba(-2a)=2a$에서 $b=-\frac{1}{a}$

즉, $f(x)=-\frac{1}{a}(x+a)(x-2a)=-\frac{1}{a}x^2+x+2a$

$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=6\int_0^1 f(x)dx$

$=6\left[-\frac{1}{3a}x^3+\frac{1}{2}x^2+2ax\right]_0^1$

$=6\left(-\frac{1}{3a}+\frac{1}{2}+2a\right)$

$=-\frac{2}{a}+3+12a=\frac{35}{2}$

$24a^2-29a-4=0$, $(3a-4)(8a+1)=0$

$a>0$이므로 $a=\frac{4}{3}$

정답 ③

121 정적분의 성질

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

일차식과 함수 $f(x)$의 곱의 미분의 역과정을 이용한 적분으로 함숫값을 묻는 문제를 이차식과 함수 $f(x)$의 곱의 미분의 역과정을 이용한 적분으로 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\int_0^4 (x^2-3x)f'(x)dx-\int_0^4 (3-2x)f(x)dx$

$=\int_0^4 (x^2-3x)f'(x)dx+\int_0^4 (2x-3)f(x)dx$

$=\left[(x^2-3x)f(x)\right]_0^4$

$=4f(4)-0\times f(0)$

$=4f(4)=18$이므로

따라서 $f(4)=\frac{9}{2}$

정답 ③

122 정적분의 성질

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

구간으로 정의된 함수의 정적분 값을 묻는 문제를 같은 유형의 정적분 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$$\int_{-2}^{2} xf(x)dx=\int_{-2}^{0} x(3x+2)dx+\int_{0}^{2} x(x^2+3x+2)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(3x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(x^3+3x^2+2x)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(3x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(3x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}x^3dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(3x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}x^3dx$$
$$=2\int_{0}^{2}3x^2dx+\int_{0}^{2}x^3dx$$
$$=2\Big[x^3\Big]_0^2+\Big[\frac{1}{4}x^4\Big]_0^2$$
$$=2\times8+4=20$$

정답 20

123 정적분과 미분의 관계

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

정적분으로 표시된 함수의 증가, 감소하는 표를 보고 넓이를 묻는 문제를 정적분으로 표시된 함수의 증가, 감소하는 표와 정적분의 값을 이용하여 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

$g(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$에서 $g'(x)=f(x)$

열린 구간 $(a,\ 0)$에서 함수 $g(x)$가 증가하므로 $f(x)>0$이고,

열린 구간 $(0,\ b)$에서 함수 $g(x)$가 감소하므로 $f(x)<0$이다.

$$\int_{a}^{b}|f(x)|dx=\int_{a}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{b}f(x)dx$$
$$=\Big[g(x)\Big]_a^0-\Big[g(x)\Big]_0^b$$
$$=g(0)-g(a)-(g(b)-g(0))$$
$$=2g(0)-g(a)-g(b)$$
$$=2k-0-\left(-\frac{k^2}{4}+3k+4\right)$$
$$=\frac{k^2}{4}-k-4=20$$

$k^2-4k-96=0,\ (k-12)(k+8)=0$

$k>0$이므로 $k=12$

정답 ④

124 정적분의 성질

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

점과 원 사이의 거리의 최솟값을 함수로 나타내고 정적분 값을 묻는 문제를 직선과 원 사이의 거리의 최솟값을 함수로 나타내고 정적분 값을 묻는 문제로 변형하였다.

직선 $y=\frac{4}{3}x$와 원 $(x-t)^2+y^2=36$ 위의 점 사이의 거리의 최솟값은 직선과 원이 만날 때는 0이고 만나지 않을 때는 직선과 원의 중심까지 거리에서 원의 반지름을 뺀 것과 같다.

직선 $y=\frac{4}{3}x$와 원 $(x-t)^2+y^2=36$이 접하는 순간은 원의 중심 $(t,\ 0)$에서 직선 $4x-3y=0$과의 거리가 원의 반지름과 같을 때이므로

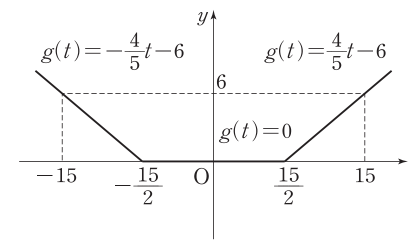
$\frac{|4t-0|}{5}=6,\ |4t|=30$에서 $t=-\frac{15}{2}$ 또는 $t=\frac{15}{2}$

(i) $-\frac{15}{2}\le t\le\frac{15}{2}$일 때, 직선과 원이 만나므로 $g(t)=0$

(ii) $t<-\frac{15}{2}$일 때, $g(t)=\frac{|4t|}{5}-6=-\frac{4}{5}t-6$

(iii) $t>\frac{15}{2}$일 때, $g(t)=\frac{|4t|}{5}-6=\frac{4}{5}t-6$

함수 $g(t)$의 그래프는 다음과 같고 y축에 대칭이므로



$$\int_{-15}^{15}g(t)dt=2\int_{0}^{15}g(t)dt$$
$$=2\left\{\int_{0}^{\frac{15}{2}}0dt+\int_{\frac{15}{2}}^{15}\left(\frac{4}{5}t-6\right)dt\right\}$$
$$=2\Big[\frac{2}{5}t^2-6t\Big]_{\frac{15}{2}}^{15}$$
$$=2\left\{(90-90)-\left(\frac{45}{2}-45\right)\right\}=45$$

정답 45

125 정적분과 미분의 관계

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

정적분과 미분의 관계와 주어진 조건을 이용하여 정적분으로 표시된 함수의 함숫값을 묻는 문제를 조건에 대칭의 성질을 더 넣고 함수의 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$g(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$에서

양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$ …… ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$g(-1)=\int_{-1}^{-1}f(t)dt=0$ …… ㉡

㉡과 조건 (다)에 의해 사차함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 최솟값(극솟값)을 가지므로

$g'(-1)=0$

㉠과 조건 (가)에서 $g'(1)=f(1)=0$

$g'(x)=f(x)=(x+1)(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+ax^2-x-a$

$f'(x)=3x^2+2ax-1$

조건 (나)에 의해

$f'(x)=3x^2+2ax-1=3(x-1)^2-4$이므로

$a=-3$

$f(x)=x^3-3x^2-x+3$
따라서 $f(4)=15$

정답 15

8 정적분의 활용

p. 62~63

3점 예상	126 ③	127 ④	128 ③
4점 예상	129 180	130 8	

126 속도와 거리

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

속도함수의 그래프를 활용하여 움직인 거리를 묻는 문제를 속도함수의 그래프 모양을 바꾼 후 움직인 거리를 묻는 문제로 변형하였다.

점 P가 시각 $t=2$에서 16까지 움직인 거리를 s라 하면

$s=\int_{2}^{16}|v(t)|dt$이므로

s는 $y=v(t)$의 그래프와 $t=2$, $t=16$, x축으로 둘러싸인 부분의 넓이이다.

$\int_{2}^{4}|v(t)|dt=\frac{1}{2}\times2\times(2+4)=6$

$\int_{4}^{6}|v(t)|dt=\frac{1}{2}\times2\times4=4$

$\int_{6}^{16}|v(t)|dt=\frac{1}{2}\times6\times(1+10)=33$

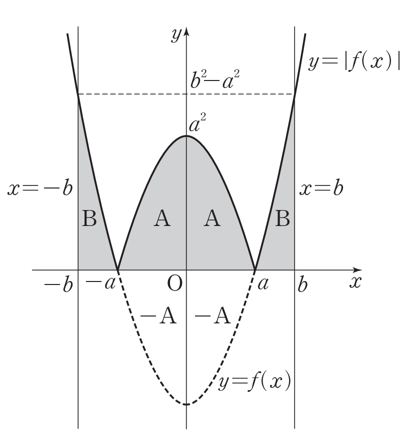
따라서 $s=6+4+33=43$

정답 ③

127 곡선과 좌표축 사이의 넓이

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

두 곡선과 상수함수 사이의 넓이를 묻는 문제를 대칭의 성질을 갖는 이차함수와 축과 상수함수로 둘러싸인 부분의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.



$A=\int_{0}^{a}\{-f(x)\}dx$, $B=\int_{a}^{b}f(x)dx$라 하면

곡선 $y=|f(x)|$와 x축 및 $|x|=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-b}^{b}|f(x)|dx=2A+2B$이다.

① $2\times\left(-\int_{0}^{a}f(x)dx+\int_{a}^{b}f(x)dx\right)=2(A+B)$

② $2\times\left(\int_{0}^{b}f(x)dx-2\int_{0}^{a}f(x)dx\right)$
$=2\{(-A+B)+2A\}=2A+2B$

③ $\int_{-b}^{b}f(x)dx-2\int_{-a}^{a}f(x)dx=(2B-2A)-2(-2A)=2A+2B$

④ $2\times\left(b^3-\int_{0}^{b}(b^2-f(x))dx+2\int_{0}^{a}f(x)dx\right)$
$=2\{b^3-(b^3+A-B)+2(-A)\}$
$=2(-3A+B)=-6A+2B$

⑤ $\int_{0}^{2b}f(x-b)dx-2\int_{0}^{2a}f(x-a)dx$
$=\int_{-b}^{b}f(x)dx-2\int_{-a}^{a}f(x)dx$
$=(2B-2A)-2(-2A)$
$=2A+2B$

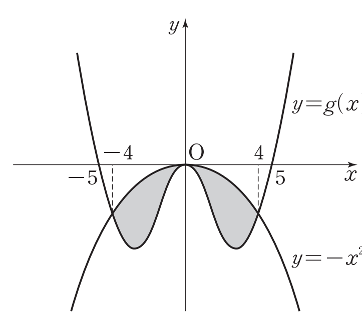
정답 ④

128 두 곡선 사이의 넓이

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

두 곡선 사이의 넓이를 알 때 상수의 값을 묻는 문제를 두 곡선 사이의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.

곡선 $y=g(x)$와 곡선 $y=-x^2$은 y축에 대칭이고
곡선 $y=g(x)$와 곡선 $y=-x^2$의 교점의 x좌표는
$g(x)=-x^2$에서
$x\geq0$일 때 $x^3-5x^2=-x^2$, $x^2(x-4)=0$
에서 $x=0$(중근) 또는 $x=4$



곡선 $y=g(x)$와 곡선 $y=-x^2$으로 둘러싸인 두 부분의 넓이는

$2\int_{0}^{4}\{(-x^2)-(x^3-5x^2)\}dx$

$=2\int_{0}^{4}(-x^3+4x^2)dx$

$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_{0}^{4}$

$=2\times\frac{64}{3}=\frac{128}{3}$

정답 ③

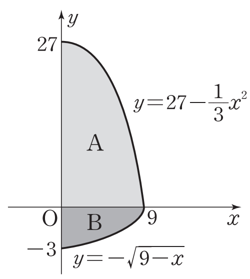
129 두 곡선 사이의 넓이

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

함수와 역함수로 둘러싸인 부분의 넓이를 묻는 문제를 이차함수와 무리함수, 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=27-\frac{1}{3}x^2(x\geq 0)$, $g(x)=-\sqrt{9-x}\ (0\leq x\leq 9)$라 하자.

구하는 부분의 넓이는 $\int_0^9\{f(x)-g(x)\}dx$이고

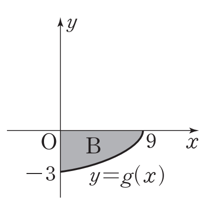


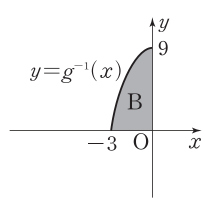
$A=\int_0^9 f(x)dx$, $B=-\int_0^9 g(x)dx$라 하면

$A=\int_0^9 f(x)dx=\int_0^9\left(27-\frac{1}{3}x^2\right)dx=\left[27x-\frac{1}{9}x^3\right]_0^9$

$=243-81=162$

$g(x)=-\sqrt{9-x}\ (0\leq x\leq 9)$에서 $g^{-1}(x)=9-x^2(-3\leq x\leq 0)$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대해 대칭이므로





$B=-\int_0^9 g(x)dx=\int_{-3}^0 g^{-1}(x)dx=\int_{-3}^0(9-x^2)dx$

$=\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^0=0-(-27+9)=18$

따라서 구하는 부분의 넓이 $A+B=162+18=180$

정답 180

130 두 곡선 사이의 넓이

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 차를 알 때 미지수를 묻는 문제를 같은 형태의 문제로 두 식만 바꿔서 두 부분으로 둘러싸인 넓이의 차를 알 때 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

두 곡선 $y=x^2-x$, $y=k(x^3-x^2-2x)+2$ $\left(k>\frac{1}{2}\right)$의 교점의 x좌표는

$x^2-x=k(x^3-x^2-2x)+2$

$x^2-x-2=kx(x^2-x-2)$

$(kx-1)(x-2)(x+1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{k}$ 또는 $x=2$

$k>\frac{1}{2}$이므로 $-1<\frac{1}{k}<2$

$g(x)=(kx^3-kx^2-2kx+2)-(x^2-x)$라 하면

$S_1=\int_{-1}^{\frac{1}{k}}\{(kx^3-kx^2-2kx+2)-(x^2-x)\}dx=\int_{-1}^{\frac{1}{k}}g(x)dx$

$S_2=\int_{\frac{1}{k}}^2\{(x^2-x)-(kx^3-kx^2-2kx+2)\}dx=\int_{\frac{1}{k}}^2\{-g(x)\}dx$

$S_1-S_2=\int_{-1}^{\frac{1}{k}}g(x)dx-\int_{\frac{1}{k}}^2\{-g(x)\}dx$

$=\int_{-1}^{\frac{1}{k}}g(x)dx+\int_{\frac{1}{k}}^2 g(x)dx$

$=\int_{-1}^2 g(x)dx$

$=\int_{-1}^2\{(kx^3-kx^2-2kx+2)-(x^2-x)\}dx$

$=\int_{-1}^2\{kx^3-(k+1)x^2-(2k-1)x+2\}dx$

$=\left[\frac{k}{4}x^4-\frac{(k+1)}{3}x^3-\frac{(2k-1)}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$

$=\frac{k}{4}\times(16-1)-\frac{(k+1)}{3}\times(8+1)$

$-\frac{(2k-1)}{2}\times(4-1)+2\times(2+1)$

$=-\frac{9}{4}k+\frac{9}{2}=\frac{3}{4}$

에서 $k=\frac{5}{3}$이므로 $p+q=3+5=8$

정답 8

PART 3 확률과 통계

1 순열

p. 66~67

3점 예상	131 72 132 ③ 133 ⑤
4점 예상	134 50

131 순열

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

수형도를 이용하여 정의역과 공역이 다르게 주어지고 특정한 조건을 만족하는 일대일함수의 개수를 묻는 문제를 정의역과 공역이 같을 때 특정한 조건을 만족하는 일대일 대응의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

조건 (가)에서 함수 f는 일대일 대응이다.
조건 (나)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 가질 수 있는 값은 1, 2, 5 또는 1, 3, 4이다.

(i) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 1, 2, 5의 값을 가지는 경우 $3!=6$
$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$은 나머지 값에 각각 하나씩 대응하므로 $3!=6$
따라서 $6\times6=36$가지

(ii) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 1, 3, 4의 값을 가지는 경우 $3!=6$
$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$은 나머지 값에 각각 하나씩 대응하므로 $3!=6$
따라서 $6\times6=36$가지

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 함수의 개수는 $36+36=72$

정답 72

132 원순열

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

특정한 두 사람이 이웃하는 조건을 만족시키도록 원형의 탁자에 앉는 경우의 수를 묻는 문제를 특정한 사람의 옆이 반드시 채워지는 경우의 수를 묻는 문제로 변형하였다.

빈 좌석 한 개를 한 사람으로 생각하여 6명을 원형으로 나열하는 경우의 수에서 빈 좌석과 A가 이웃하는 경우의 수를 제외하면 된다.
6명을 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(6-1)!=5!=120$
빈 좌석과 A를 묶어서 한사람으로 생각하면 5명을 원형으로 나열하는 경우의 수는 $(5-1)!=4!=24$
빈 좌석과 A가 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 빈 좌석과 A가 이웃하도록 앉는 경우의 수는 $24\times2=48$
따라서 구하는 경우의 수는 $120-48=72$

정답 ③

133 중복순열

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

함숫값들의 연산 결과를 만족하는 경우를 수형도로 나타낸 후 함수의 개수를 묻는 문제를 같은 형태의 함숫값들 사이의 새로운 연산 결과를 만족하는 함수의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

(i) $f(1)=1$ 또는 $f(1)=4$ 또는 $f(1)=5$인 경우
$\{f(1)\}^2=f(2)+f(3)$을 만족시키는 함수 f는 없다.

(ii) $f(1)=2$인 경우
$2^2=1+3$ 또는 $2^2=2+2$이고 $f(4)$, $f(5)$의 값은 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이므로
$({}_2P_2+1)\times{}_5\Pi_2=3\times5^2=75$

(iii) $f(1)=3$인 경우
$3^2=4+5$이고 $f(4)$, $f(5)$의 값은 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이므로
${}_2P_2\times{}_5\Pi_2=2\times5^2=50$

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $75+50=125$

정답 ⑤

134 같은 것이 있는 순열

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

주어진 카드 내에서 같은 숫자를 중복 사용하여 만들 수 있는 홀수의 개수를 묻는 문제를 주어진 카드 내에서 같은 숫자를 중복 사용하여 만들 수 있는 배수의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

4의 배수이기 위해서는 여섯 자리 자연수의 뒤에서 두 자리의 수가 4의 배수이어야 한다.

(i) 선택되지 않은 카드에 적힌 수가 0인 경우
뒤에서 두 자리가 12인 경우 $\frac{4!}{3!}=4$가지
뒤에서 두 자리가 32인 경우 $\frac{4!}{2!2!}=6$가지
$4+6=10$가지

(ii) 선택되지 않은 카드에 적힌 수가 1인 경우
뒤에서 두 자리가 12인 경우 가장 앞자리 수가 0인 경우를 제외해야 하므로 $\frac{4!}{3!}-1=3$가지
뒤에서 두 자리가 20인 경우 $\frac{4!}{3!}=4$가지
뒤에서 두 자리가 32인 경우 가장 앞자리 수가 0인 경우를 제외해야 하므로 $\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=12-3=9$가지
$3+4+9=16$가지

(iii) 선택되지 않은 카드에 적힌 수가 2인 경우 4의 배수가 될 수 없다.

(iv) 선택되지 않은 카드에 적힌 수가 3인 경우
뒤에서 두 자리가 12인 경우 가장 앞자리 수가 0인 경우를 제외해야 하므로 $\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=9$가지
뒤에서 두 자리가 20인 경우 $\frac{4!}{2!2!}=6$가지
뒤에서 두 자리가 32인 경우 가장 앞자리 수가 0인 경우를 제외해야 하므로 $\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=12-3=9$가지
$9+6+9=24$가지

따라서 구하는 4의 배수의 개수는 $10+16+24=50$

정답 50

2 조합

p. 68~70

3점 예상	135 ⑤	136 ③	137 ③	138 ②	139 ⑤
4점 예상	140 31	141 ②			

135 중복조합

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

중복조합을 이용하여 물건을 조건을 만족하도록 나누는 경우의 수를 묻는 문제를 물건을 받을 조건을 만족하는 경우를 나눈 후에 중복조합을 이용하여 경우의 수를 묻는 문제로 변형하였다.

사과를 받는 사람 수에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각한다.

(i) 사과를 받는 사람이 2명인 경우

4명 중 2명이 사과를 각각 2개, 1개씩 받으므로 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

사과를 받지 않은 사람 2명에게 각각 오렌지 1개씩을 먼저 나누어 주고 나머지 오렌지 3개를 4명의 사람들에게 나누어주는 경우의 수는

${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

따라서 이 경우의 수는 $12\times20=240$

(ii) 사과를 받는 사람이 3명인 경우

4명 중 3명이 사과를 각각 1개씩 받으므로 경우의 수는 ${}_4C_3=4$

사과를 받지 않은 사람 1명에게 오렌지 1개를 먼저 주고 나머지 오렌지 4개를 4명의 사람들에게 나누어주는 경우의 수는

${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4=35$

따라서 이 경우의 수는 $4\times35=140$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $240+140=380$

정답 ⑤

136 중복조합

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

중복조합을 이용하여 방정식과 부등식을 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수를 묻는 문제를 중복조합을 이용하여 방정식과 부등식을 만족하는 자연수의 순서쌍의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

(나)에서 $a+c<3+b$

(가)에서 $a+c=13-b$이므로

$13-b<3+b$

즉, $b>5$

$a=a'+1$, $b=b'+6$, $c=c'+1$ (a', b', c'은 음이 아닌 정수)이라 하면

$(a'+1)+(b'+6)+(c'+1)=13$

$a'+b'+c'=5$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 순서쌍 (a', b', c')의 개수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

정답 ③

137 중복조합

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

조합과 중복조합의 연산에서 자연수 n의 값을 묻는 문제를 순열과 조합과 중복조합을 모두 사용한 연산에서 자연수 n의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$(n+1)\times n\times(n-1)={}_{n+1}C_2+3\times\dfrac{(n+2)\times(n+1)\times n}{6}$

$n(n+1)(n-1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$

$n-1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{n+2}{2}$

따라서 $n=5$

정답 ③

138 중복조합의 활용

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

전개식에서 특정한 차수 이상을 갖는 항의 개수를 묻는 문제를 전개식에서 차수가 모두 홀수인 항의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

$(a+b+c)^{15}$의 전개식에서 각 항을 $a^xb^yc^z$라 하면

$x+y+z=15$

이때 x, y, z는 홀수이므로

$x=2x'+1$, $y=2y'+1$, $z=2z'+1$ (x', y', z'는 음이 아닌 정수)

$(2x'+1)+(2y'+1)+(2z'+1)=15$

$x'+y'+z'=6$

위 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 모든 순서쌍 (x', y', z')의 개수는 ${}_3H_6={}_8C_2=28$

정답 ②

139 조합

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

함숫값들 사이의 특정한 원소들 사이의 대소 관계를 만족하는 일대일 대응의 개수를 묻는 문제를 두 가지 조건을 모두 만족하는 함수의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

조건 (가)에서 $f(2n+2)-f(2n)\geq2$이므로 $f(6)>f(4)>f(2)$이고 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$은 서로 연속하는 자연수가 아니다. 1부터 7까지의 자연수 중 조건 (가)를 만족시키도록 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$에 각각 대응하는 3개의 자연수를 택하는 경우의 수는 ∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨에서 5개의 ∨ 중 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_3=\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

또한 조건 (나)에서 $f(2n+1)-f(2n-1)\geq1$이므로

$f(5)>f(3)>f(1)$

X의 원소 중 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$에 대응하는 서로 다른 3개의 자연수를 택하는 경우의 수는

${}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

$f(7)$의 값이 될 수 있는 경우의 수는 7

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$10\times35\times7=2450$

정답 ⑤

140 조합의 활용

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

경우를 두 가지로 나누어 경우의 수를 묻는 문제를 경우를 세 가지로 나누어 경우의 수를 묻는 문제로 변형하였다.

(i) 현미와 백미를 섞는 날이 1일인 경우

월	화	수	목	금
현미		현미		현미
백미	백미		백미	

백미를 사용하는 날을 선택하는 경우의 수 ${}_3C_1=3$

현미와 백미를 섞는 날 이외의 나머지 4일 중 잡곡을 2일 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

$3\times6=18$

(ii) 현미와 백미를 섞는 날이 2일인 경우

월	화	수	목	금
현미		현미		현미
백미	백미	백미		
			잡곡	

백미를 사용하는 날을 선택하는 경우의 수 ${}_3C_2\times{}_2C_1=3\times2=6$

현미와 백미가 모두 사용되지 않은 날 반드시 잡곡을 사용해야 하고, 잡곡이 사용되지 않고 한 가지 곡물만 사용된 2일 중 잡곡을 사용하는 날을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

$6\times2=12$

(iii) 현미와 백미를 섞는 날이 3일인 경우

나머지 2일 동안 각각 잡곡을 사용해야 하므로 경우의 수는 1

따라서 구하는 경우의 수는 $18+12+1=31$

정답 31

141 중복조합

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

홀수, 짝수 조건을 만족하면서 종이를 자를 수 있는 경우의 수를 묻는 문제를 색깔 조건도 추가되면서 종이를 자르는 경우의 수를 묻는 문제로 변형하였다.

(i) 왼쪽에서 첫 번째 조각에 홀수개의 정사각형이 있는 경우

나머지 조각에서 검은 정사각형의 개수가 흰 정사각형의 개수보다 작지 않도록 하기 위해서는 나머지 3개의 조각에는 짝수개의 정사각형이 있어야 한다.

4개의 조각 중 한 조각에만 홀수개의 정사각형이 있어야 한다.

즉, 각 조각의 정사각형의 개수가 '홀수/짝수/짝수/짝수'가 되도록 잘라야 한다.

(ii) 왼쪽에서 첫 번째 조각에 짝수개의 정사각형이 있는 경우

나머지 3개의 조각 중 한 개의 조각에만 홀수개의 정사각형이 있도록 잘라야 한다. 즉 각 조각의 정사각형의 개수가 '짝수/홀수/짝수/짝수' 또는 '짝수/짝수/홀수/짝수' 또는 '짝수/짝수/짝수/홀수'가 되도록 잘라야 한다.

(i), (ii)에서 잘라서 만든 4개의 조각 중 한 조각에만 홀수개의 정사각형이 있어야 한다.

'홀수/짝수/짝수/짝수'가 되도록 자르는 경우의 수는

$(2x-1)+2y+2z+2w=13$ (x, y, z, w는 자연수)에서

$x+y+z+w=7$

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$ (x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+(w'+1)=7$

$x'+y'+z'+w'=3$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z', w'의 순서쌍 (x', y', z', w')의 개수는

$${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

'짝수/홀수/짝수/짝수', '짝수/짝수/홀수/짝수', '짝수/짝수/짝수/홀수'로 자르는 경우도 각각 20가지이므로 구하는 경우의 수는 $20\times4=80$

정답 ②

3 분할과 이항정리

p. 71~72

3점 예상	142 ② 143 ③ 144 ② 145 ③
4점 예상	146 780

142 이항정리

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

이항정리에서 특정한 항이 존재하도록 하는 자연수 n의 개수를 묻는 문제를 전개식에서 존재할 수 있는 모든 항의 차수의 합을 수열로 나타낸 후 수열의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$\left(x^3+\dfrac{2}{x}\right)^n$의 전개식에서 일반항은

$${}_nC_r(x^3)^{n-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_nC_r2^rx^{3n-4r}$$

따라서 $k=3n-4r$, $0\le r\le n$이므로

$$a_n=\sum_{r=0}^{n}(3n-4r)=3n(n+1)-2n(n+1)=n(n+1)$$

$$\sum_{n=1}^{5}3a_n=3\sum_{n=1}^{5}n(n+1)=210$$

정답 ②

143 이항정리의 활용

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

이항계수의 성질을 이용한 로그 연산을 묻는 문제를 같은 형태의 이항계수의 또 다른 성질을 이용한 로그 연산을 묻는 문제로 변형하였다.

${}_{8}C_{0}+8\times{}_{8}C_{1}+8^{2}\times{}_{8}C_{2}+\cdots+8^{8}\times{}_{8}C_{8}=(1+8)^{8}=9^{8}=3^{16}$

$\log_{3}3^{16}=16$

정답 ③

144 자연수의 분할

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

자연수를 같은 수를 포함하지 않고 2개 이상의 수로 분할하는 방법의 수를 묻는 문제를 2개 이상의 양의 약수로 분할하는 방법의 수를 묻는 문제로 변형하였다.

$$\begin{aligned}8&=4+4\\&=4+2+2\\&=4+2+1+1=2+2+2+2\\&=4+1+1+1+1=2+2+2+1+1\\&=2+2+1+1+1+1\\&=2+1+1+1+1+1+1\\&=1+1+1+1+1+1+1+1\end{aligned}$$

따라서 구하는 방법의 수는 $1+1+2+2+1+1+1=9$

정답 ②

145 이항정리

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

부분집합의 최대원소의 합을 묻는 문제를 원소의 개수가 3개인 부분집합의 최대원소의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$M(A_n)=8$인 집합 A_n는 $A_n=\{a,\ b,\ 8\}$ $(a<b<8)$이므로 집합 A_n의 개수는 0, 1, 2, $\cdots$, 7 중 서로 다른 2개의 정수를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{8}C_{2}=\frac{8\times7}{2}$

마찬가지로 $M(A_n)=k$ $(2\le k\le 8,\ k$는 정수$)$인 집합 A_n는 $A_n=\{a,\ b,\ k\}$ $(a<b<k)$이므로 이러한 집합 A_n의 개수는 0, 1, 2, $\cdots$, $k-1$ 중 서로 다른 2개의 정수를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{k}C_{2}=\frac{k(k-1)}{2}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p}M(A_n)&=2\times{}_{2}C_{2}+3\times{}_{3}C_{2}+4\times{}_{4}C_{2}+5\times{}_{5}C_{2}+\cdots+8\times{}_{8}C_{2}\\&=\sum_{k=2}^{8}k\times{}_{k}C_{2}\\&=\sum_{k=2}^{8}k\times\frac{k(k-1)}{2}\\&=\sum_{k=1}^{8}\frac{k^{2}(k-1)}{2}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8\times9}{2}\right)^{2}-\frac{8\times9\times17}{6}\right\}\\&=\frac{1}{2}(1296-204)\\&=546\end{aligned}$$

정답 ③

146 집합의 분할

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

전체 학생을 3개의 모둠으로 나누는 경우의 수를 묻는 문제를 남학생과 여학생을 구분하고 모둠의 전체 학생 수 등의 조건을 만족하는 경우의 수를 묻는 문제로 변형하였다.

각 조에는 여학생이 적어도 1명씩 포함되므로 여학생 4명을 3개의 조로 나누기 위해서는 각 조의 여학생 수가 2명, 1명, 1명이어야 한다.

여학생을 나누는 경우의 수는 ${}_{4}C_{2}\times{}_{2}C_{1}\times{}_{1}C_{1}\times\frac{1}{2!}=6$

남학생 5명을 3개의 조로 나누기 위해서는 각 조의 남학생 수가 (2명, 2명, 1명) 또는 (3명, 1명, 1명)이어야 한다.

(i) (2명, 2명, 1명)인 경우

${}_{5}C_{2}\times{}_{3}C_{2}\times{}_{1}C_{1}\times\frac{1}{2!}=15$

나누어진 남학생 조를 이미 나누어져있는 여학생 조에 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 $6\times15\times3!=540$

(ii) (3명, 1명, 1명)인 경우

${}_{5}C_{3}\times{}_{2}C_{1}\times{}_{1}C_{1}\times\frac{1}{2!}=10$

나누어진 남학생 조를 이미 나누어져 있는 여학생 조에 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

그러나 각 조의 인원이 4명 이하이어야 하므로 남학생이 3명인 조는 여학생이 2명인 조와 함께 구성되는 경우의 수 $2!=2$를 제외하면 $3!-2!=4$

따라서 $6\times10\times4=240$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $540+240=780$

정답 780

4 확률

p. 73~75

3점 예상	147 ②	148 ③	149 ⑤	150 ②
4점 예상	151 23	152 37	153 ①	154 ⑤

147 확률의 뜻

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

조건을 만족하는 카드를 뽑는 수학적인 확률을 묻는 문제를 조건을 만족하는 수형도를 나누는 경우가 더 많은 수학적 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

10장의 카드에서 두 학생이 각각 서로 다른 카드를 한 장씩 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}P_{2}=10\times9=90$

양의 약수의 개수가 6이기 위해서는 $6=1\times6=2\times3$이므로 $N=p^{5}$ 또는 $N=p\times q^{2}$ $(p,\ q$는 서로 다른 소수$)$

(i) $N=p^{5}$인 경우

두 학생이 뽑은 카드에 적힌 수의 순서쌍은 $(2^{2},\ 2^{3})$ 또는 $(2^{3},\ 2^{2})$

(ii) $N=p\times q^{2}$인 경우

1부터 10까지의 자연수 중 소수의 거듭제곱은 2^2, 3^2이고 소수는 2, 3, 5, 7이다.

① 두 학생이 각각 p, q^2를 택하는 경우의 수

한 학생이 2^2을 뽑으면 다른 학생은 3, 5, 7 중에서 하나를 뽑아야 한다. 한 학생이 3^2을 뽑으면 다른 학생은 2, 5, 7 중에 하나를 뽑아야 하므로 경우의 수는 $(3+3)\times2=12$

② 두 학생이 각각 pq, q를 뽑는 경우

(2, 6), (2, 10), (3, 6), (5, 10), (6, 2), (6, 3), (10, 2), (10, 5) 8가지이다.

①, ②에서 구하는 경우의 수는 $12+8=20$

(i), (ii)에서 N의 양의 약수의 개수가 6이 되도록 카드를 뽑는 경우의 수는 $2+20=22$

따라서 구하는 확률은 $\frac{22}{90}=\frac{11}{45}$

정답 ②

148 확률의 덧셈정리

이 문제의 변형 포인트!	**문항의 축소, 확대 변형**

확률의 덧셈정리를 이용하여 합사건의 확률을 묻는 문제를 합사건의 조건을 변경하여 합사건의 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 ${}_6\mathrm{P}_3=6\times5\times4=120$

3의 배수인 사건을 A라 하고 5의 배수인 사건을 B라 하자.

(i) 3의 배수가 되기 위해서는 각 자리 수의 합이 3의 배수이어야 하므로 $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 6\}$에서 각각 하나의 원소를 택하여 만든 자연수의 개수와 같다. 즉 $2\times2\times2\times3!=48$

(ii) 5의 배수가 되기 위해서는 일의 자리 수가 0 또는 5이어야 하므로 일의 자리 수를 5로 고정하고 나머지 자리 수를 택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2=5\times4=20$

(iii) 3의 배수이면서 5의 배수인 자연수의 개수는

일의 자리 수는 5이고 두 집합 $\{1, 4\}$, $\{3, 6\}$에서 각각 하나의 원소씩 택하여 나머지 두 자리 수를 정하는 경우의 수와 같으므로 $2\times2\times2!=8$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{48}{120}+\frac{20}{120}-\frac{8}{120}=\frac{1}{2}$

정답 ③

149 여사건의 확률

이 문제의 변형 포인트!	**문항의 축소, 확대 변형**

여사건을 이용하여 적어도 1명 이상 포함될 확률을 묻는 문제를 여사건을 이용하여 적어도 2명 이상 포함될 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

4명을 임의로 선택할 때 남학생이 적어도 2명 이상 포함되는 사건을 A라 하자.

동아리 학생 7명 중 임의로 4명을 선택하는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_4=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

남학생이 2명 미만 포함되는 경우의 수는 남학생이 1명만 포함되는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_3=4$

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{4}{35}$이므로

구하는 확률은 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$

정답 ⑤

150 확률의 뜻

이 문제의 변형 포인트!	**개념, 원리 활용**

경우의 수를 이용하여 확률을 묻는 문제를 수형도를 이용하여 경우의 수를 구한 후 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

총 10장의 카드 중 서로 다른 6장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_6=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

3이 적힌 카드의 수가 1이 적힌 카드의 수의 2배가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 3이 적힌 카드를 4장, 1이 적힌 카드를 2장 뽑는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_2=1$

(ii) 3이 적힌 카드를 2장, 2가 적힌 카드를 3장, 1이 적힌 카드를 1장 뽑는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_1=48$

그러므로 3이 적힌 카드의 수가 1이 적힌 카드의 수의 2배가 되는 경우의 수는 $1+48=49$

따라서 구하는 확률은 $\frac{49}{210}=\frac{7}{30}$

정답 ②

151 여러 가지 사건

이 문제의 변형 포인트!	**개념, 원리 활용**

배반사건이 되도록 하는 자연수 n의 값을 묻는 문제를 조건을 조금 더 어렵게 주고 배반 사건이 되도록 하는 자연수 n의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$a+b$의 값이 6의 약수가 나오는 순서쌍 (a, b)는

(1, 1)

(1, 2), (2, 1)

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)

이므로

$A=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

두 사건 A, B_n의 교집합이 존재하는 경우는

$(1, 1)\in A\cap B_1$

$(2, 1), (1, 2)\in A\cap B_2$

$(5, 1), (1, 5)\in A\cap B_5$

$(4, 2), (2, 4)\in A\cap B_8$

$(3, 3)\in A\cap B_9$이고

B_7은 공사건이므로

두 사건 A, B_n이 서로 배반사건이 되도록 하는 공사건이 아닌 사건 B_n은 B_3, B_4, B_6, B_{10}이다.

따라서 자연수 n의 값의 합은 $3+4+6+10=23$

정답 23

152 확률의 뜻

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

2의 거듭제곱의 합의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 확률을 묻는 문제를 행의 수를 늘려서 조건을 만족하는 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

각 칸에 9개의 수를 한 개씩 임의로 적어 넣는 경우의 수는 $9!$

	1열	2열	3열
1행	①	②	③
2행	④	⑤	⑥
3행	⑦	⑧	2^8

$L_1<L_2<L_3$, $C_1<C_2<C_3$를 만족시키기 위해서는 2^8은 3행 3열에 적어야 한다. 2^7은 오른쪽 표의 ⑤ 또는 ⑥ 또는 ⑧에 적어야 한다.

(i) 2^7을 ⑤에 적는 경우

나머지 7개의 수를 임의로 적으면 되므로 $7!$

(ii) 2^7을 ⑥에 적는 경우

2^6을 2열 즉, ②, ⑤, ⑧ 중 어느 한 칸에 적고 나머지는 임의로 적는 경우의 수는 $3\times6!$

2^6을 ③에 적고 2^5을 ②, ⑤, ⑧ 중 어느 한 칸에 적고 나머지는 임의로 적는 경우의 수는 $3\times5!$

(iii) 2^7을 ⑧에 적는 경우

2^6을 2행 즉, ④, ⑤, ⑥ 중 어느 한 칸에 적고 나머지는 임의로 적는 경우의 수는 $3\times6!$

2^6을 ⑦에 적고 2^5을 ④, ⑤, ⑥ 중 어느 한 칸에 적고 나머지는 임의로 적는 경우의 수는 $3\times5!$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{7!}{9!}+\frac{3\times6!+3\times5!}{9!}+\frac{3\times6!+3\times5!}{9!}$$
$$=\frac{42\times5!+(21\times5!)\times2}{9!}$$
$$=\frac{84\times5!}{9!}=\frac{84}{9\times8\times7\times6}=\frac{1}{36}$$

따라서 $p+q=36+1=37$

정답 37

153 여사건의 확률

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

원순열을 이용하여 특정한 조건을 만족하도록 자리 배치할 확률을 묻는 문제를 여사건을 이용한 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

적어도 한 쌍의 남학생과 여학생이 마주 보고 앉는 사건은

어떤 남학생과 여학생도 마주 보고 앉지 않는 사건의 여사건이다.

8명의 학생이 원형의 탁자에 둘러앉는 방법의 수는 $(8-1)!$

어떤 남학생과 여학생도 마주 보고 앉지 않으려면

남학생은 남학생끼리 여학생은 여학생끼리 마주 보고 앉아야 한다.

남학생 4명을 두 명씩 짝짓는 방법의 수는 ${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=3$

여학생 4명을 두 명씩 짝짓는 방법의 수는 ${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=3$

짝지은 네 쌍의 학생이 원형의 탁자에 둘러앉을 때

먼저 한 쌍의 학생의 자리를 고정시킨 후 나머지 세 쌍이 학생이 앉는 경우의 수는 $3!$

나머지 세 쌍의 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!\times2!\times2!$이므로

따라서 어떤 남학생과 여학생도 마주 보고 앉지 않을 확률은

$$\frac{3\times3\times3!\times2!\times2!\times2!}{(8-1)!}=\frac{3}{35}$$

구하고자하는 확률은 $1-\frac{3}{35}=\frac{32}{35}$

정답 ①

154 확률의 덧셈정리

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

합의 법칙을 이용하여 확률을 묻는 문제를 주어진 사건을 서로소인 여러 개의 합사건을 이용하여 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

두 학생이 가진 전체 공은 1이 적힌 공 5개, 2가 적힌 공 5개이므로 공에 적힌 수의 합은 15이다. 각 학생이 가진 공에 적힌 수의 합의 차가 1이기 위해서는 각 학생이 가진 공에 적힌 수의 합이 각각 7, 8이어야 하고 각 학생은 5개씩 공을 갖고 있으므로 한 학생은 1이 적힌 공 2개, 2가 적힌 공 3개, 다른 학생은 1이 적힌 공 3개, 2가 적힌 공 2개를 갖고 있어야 한다.

2개씩 공을 교환한 후 각 학생이 가진 공에 따라 다음과 같은 경우가 있다.

(i) A학생은 1이 적힌 공 2개, 2가 적힌 공 3개를 갖고 있고 B학생은 1이 적힌 공 3개, 2가 적힌 공 2개를 가진 경우

서로 같은 수가 적힌 공을 서로 교환해야 하므로

1이 적힌 공 2개씩 교환하는 경우의 수는 ${}_2C_2\times{}_3C_2=3$

1이 적힌 공 1개, 2가 적힌 공 1개씩 교환하는 경우의 수는

$({}_2C_1\times{}_3C_1)\times({}_3C_1\times{}_2C_1)=36$

2가 적힌 공 2개씩 교환하는 경우의 수는 ${}_3C_2\times{}_2C_2=3$

이 경우의 수는 $3+36+3=42$

(ii) A학생은 1이 적힌 공 3개, 2가 적힌 공 2개를 갖고 있고 B학생은 1이 적힌 공 2개, 2가 적힌 공 3개를 가진 경우

A학생은 2가 적힌 공 2개를 주고, B학생은 1이 적힌 공 1개, 2가 적힌 공 1개를 주는 경우의 수는 ${}_3C_2\times({}_3C_1\times{}_2C_1)=18$

A학생은 1이 적힌 공 1개, 2가 적힌 공 1개를 주고, B학생은 1가 적힌 공 2개를 주는 경우의 수는 $({}_2C_1\times{}_3C_1)\times{}_3C_2=18$

이 경우의 수는 $18+18=36$

두 학생 A, B가 서로 2개씩 공을 교환하는 경우의 수는

${}_5C_2\times{}_5C_2=100$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{42}{100}+\frac{36}{100}=\frac{78}{100}=\frac{39}{50}$$

정답 ⑤

5 조건부확률

p. 76~79

3점 예상	155 ② 156 ④ 157 ⑤ 158 ③ 159 650 160 155
4점 예상	161 ④ 162 ① 163 ②

155 조건부확률

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

주어진 표를 이용하여 조건부확률을 묻는 문제를 간단한 표로 정리된 조건부확률을 묻는 문제로 변형하였다.

입상한 세 명이 모두 A고등학교에 재학 중인 사건을 A라 하고 B고등학교에 재학 중인 사건을 B라 하자.

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}$

입상한 세 명이 모두 여학생인 사건을 C라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(C|A\cup B)$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_3+{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{5}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C\cap(A\cup B))&=\mathrm{P}((C\cap A)\cup(C\cap B))\\&=\mathrm{P}(C\cap A)+\mathrm{P}(C\cap B)\\&=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}\\&=\frac{{}_5\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{40}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(C|A\cup B)=\frac{\mathrm{P}(C\cap(A\cup B))}{\mathrm{P}(A\cup B)}=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{8}$$

정답 ②

156 확률의 곱셈정리

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

표가 주어지지 않은 조건부확률과 확률의 곱셈정리를 이용하여 상황에 맞는 확률을 묻는 문제를 조건부확률과 여사건을 이용하여 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

후반전 종료 시 승리하는 사건을 A라 하고 후반전 종료 시 비기는 사건을 B라 하자.

연장경기 종료 시 승리하는 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{3}{10}$, $\mathrm{P}(C|B)=\dfrac{4}{9}$

따라서 K 국가대표 축구팀이 어느 경기에서 전반전을 앞서고 있는 상황에서 끝냈을 때 이 경기에서 최종 승리할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)&=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)P(C|B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{19}{30}\end{aligned}$$

정답 ④

157 사건의 독립과 종속

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

독립사건인 경우의 조건부확률과 확률의 곱셈정리를 이용하여 동시에 일어날 확률을 묻는 문제를 독립사건과 여사건의 확률을 이용하여 합사건의 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B도 서로 독립이고 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)$

$\mathrm{P}(A)=x$라 하면

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(B^C)=1-x$

$\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{2}(1-x)$

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=x\times\dfrac{1}{2}(1-x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{3}{25}$

$25x^2-25x+6=0$

$(5x-3)(5x-2)=0$

$x=\dfrac{2}{5}$ 또는 $x=\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{P}(A)=x>\dfrac{1}{2}$이므로 $x=\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{12}{25}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{12}{25}=\dfrac{23}{25}$

정답 ⑤

158 독립시행의 확률

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

조건을 만족시키는 시행횟수를 구한 후 한 번의 시행으로 사건이 일어날 확률을 구하고 독립시행의 확률을 이용하여 확률을 묻는 문제를 한 번의 시행으로 사건이 일어날 확률이 정해지는 경우 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족하는 시행횟수를 묻는 문제로 변형하였다.

같은 룰렛을 n번 반복하여 돌리는 독립시행에서 2000원, 3000원의 상금을 받기 위해서는 각각 2번, 3번 당첨되어야 하므로

2000원의 상금을 받을 확률은 ${}_n\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$

3000원의 상금을 받을 확률은 ${}_n\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$

${}_n\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}\le 2\times{}_n\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$

$\dfrac{n(n-1)}{2}\times\dfrac{3^{n-2}}{4^n}\le\dfrac{2n(n-1)(n-2)}{3!}\times\dfrac{3^{n-3}}{4^n}$

$3\le\dfrac{2(n-2)}{3}$

$9\le 2n-4$

$n\ge\dfrac{13}{2}$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7

정답 ③

159 사건의 독립과 종속

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

두 사건이 서로 독립이 되도록 하는 표본공간의 원소의 개수를 묻는 문제를 두 사건이 서로 독립이 되도록 하는 곱사건의 원소의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

지지도 조사에 참여한 사람 중 임의로 택한 사람이 40대 미만인 사건을 X라 하고 후보 A를 지지하는 사건을 Y라 하자. 두 사건 X, Y는 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y)$가 성립한다.

$\mathrm{P}(X)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(Y)=\frac{120}{n}$이므로

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y)=\frac{3}{5}\times\frac{120}{n}=\frac{72}{n}$

그러므로 후보 A를 지지하는 40대 미만의 연령층의 사람 수는

$\frac{72}{n}\times n=72$

지지도 조사에 참여한 n명의 사람 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

지지 여부 / 연령	지지한다.	지지하지 않는다.	계
40대 미만	72	$\frac{3}{5}n-72$	$\frac{3}{5}n$
40대 이상	48	$\frac{2}{5}n-48$	$\frac{2}{5}n$
계	120	$n-120$	n

후보 A를 지지하지 않는 40대 이상 연령층의 사람 수가 212이므로

$\frac{2}{5}n-48=212$

$\frac{2}{5}n=260$

따라서 $n=650$

정답 650

160 독립시행의 확률

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

주사위를 던지는 독립시행에서 조건에 따라 움직일 때 원과 점이 만날 확률을 묻는 문제를 독립시행의 확률을 활용하여 순서를 번갈아가며 하는 게임에서 승리할 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

B가 4번째 공을 던질 때까지 A는 3점 미만의 점수를 얻어야 하므로 4번 중 2번 이하의 골을 성공시켜야 한다. 이 확률은

${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1+8+24}{81}=\frac{33}{81}$

B가 4번째 공을 던져 승리하기 위해서는 공을 3번 던졌을 때 2번 골을 성공시키고 4번째 공을 던져 골을 성공시켜야 하므로 이 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

두 학생 A, B가 골을 성공시키는 사건은 서로 독립적이므로 B가 4번째 공을 던져 승리할 확률은 $\frac{33}{81}\times\frac{3}{16}=\frac{11}{144}$

따라서 $p+q=144+11=155$

정답 155

161 조건부확률

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

표가 주어지지 않은 경우의 조건부확률을 묻는 문제를 사건의 정의에 따라서 조건부확률을 묻는 문제로 변형하였다.

임의로 선택한 1개의 주화가 은색인 사건을 A라 하고 호랑이 캐릭터가 새겨져 있는 사건을 B라 하자.

400개의 기념주화 중 금색 주화가 240개이므로 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{240}{400}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

400개의 기념주화 중 호랑이 캐릭터가 새겨진 은색 주화는 100개이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{100}{400}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{4}+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{3}{20}$

총 400개의 기념주화 중 호랑이 캐릭터가 새겨져 있는 주화는 200개이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{3}{20}+\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{2}-\frac{3}{20}=\frac{7}{20}$

따라서 전체 기념주화 중 임의로 선택한 1개에 곰 캐릭터가 새겨져 있을 때 이 주화가 금색일 확률은

$$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{7}{20}}{\frac{1}{2}}=\frac{7}{10}$$

정답 ④

162 조건부확률

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

주어진 상황을 표로 만들어 조건부확률을 묻는 문제를 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}$임을 이용하여 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률을 이용하여 조건부확률을 묻는 문제로 변형하였다.

이 공장에서 생산된 모니터 중 임의로 한 대를 선택하였을 때, 그 모니터가 α테스트를 통과한 제품인 사건을 A라 하고 β테스트를 통과한 제품인 사건을 B라 하자.

이 공장에서 생산된 모니터 중 임의로 선택한 한 대의 모니터가 합격품으로 인정된 제품인 사건은 $A\cup B$이므로 이 공장에서 생산된 모니터 중 임의로 선택한 한 대의 모니터가 합격품으로 인정된 모니터일 때 α테스트를 통과하지 못했을 확률은

$$\mathrm{P}(A^C|A\cup B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap(A\cup B))}{\mathrm{P}(A\cup B)}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\\&=1-\frac{1}{20}\times\frac{1}{5}\end{aligned}$$

$=\frac{99}{100}$

이고 $\mathrm{P}(A^C\cap(A\cup B))=\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{20}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{25}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C|A\cup B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap(A\cup B))}{\mathrm{P}(A\cup B)}=\frac{\frac{1}{25}}{\frac{99}{100}}=\frac{4}{99}$

정답 ①

163 확률의 곱셈정리

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

앞에서 일어난 사건의 결과에 따라 다음 사건이 영향을 받는 사건의 확률을 묻는 문제를 같은 형태의 문제로 조건을 바꾸어 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

주머니 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내었을 때 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 사건을 X라 하고 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 사건을 Y라 하자.

$\mathrm{P}(X)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5}$

(i) 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 때 이 공을 모두 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 4개와 검은 공 3개가 있으므로

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y|X)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{35}$

(ii) 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공이 아닐 때, 즉 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공이 하나는 흰 공, 하나는 검은 공일 때 이 공을 모두 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 4개가 있으므로

$\mathrm{P}(Y|X^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

$\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y|X^C)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{2}{35}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\frac{6}{35}+\frac{2}{35}=\frac{8}{35}$

정답 ②

6 이산확률변수의 확률분포

p. 80~81

3점 예상	164 ③	165 ②	166 ②	167 21	168 36
4점 예상	169 ②				

164 이산확률변수의 평균과 분산

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

이산확률변수의 기댓값이 주어진 경우 미지수를 묻는 문제를 이산확률변수의 기댓값을 주고 분산을 묻는 문제로 변형하였다.

주머니 속에 든 공 중 3이 적혀 있는 공의 개수를 x라 하면 2가 적혀 있는 공의 개수는 $x+2$, 1이 적혀 있는 공의 개수는 $8-2x$이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{8-2x}{10}$	$\frac{x+2}{10}$	$\frac{x}{10}$	1

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=1\times\frac{8-2x}{10}+2\times\frac{x+2}{10}+3\times\frac{x}{10}\\&=\frac{(8-2x)+(2x+4)+3x}{10}\\&=\frac{3x+12}{10}\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x=1$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{1^2\times6+2^2\times3+3^2}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2\\&=\frac{27}{10}-\frac{9}{4}\\&=\frac{9}{20}\end{aligned}$$

정답 ③

165 이산확률변수의 평균과 분산

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

확률분포표와 기댓값이 주어졌을 때 분산을 묻는 문제를 확률분포표를 이용하여 기댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

확률의 총합은 1이므로 $3a+2b+\frac{1}{4}=1$

즉, $3a+2b=\frac{3}{4}$

확률은 0 또는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\frac{3}{4}=3a+2b\geq2\sqrt{6ab}$ (단, 등호는 $3a=2b$일 때 성립)

$a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{3}{16}$이므로

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{3}{16}+4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{3}{16}=\frac{25}{8}$

따라서 $p+q=33$

정답 ②

166 이산확률변수의 평균과 분산

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

확률질량함수를 이용한 미지수를 묻는 문제를 확률질량함수를 이용하여 기댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

확률의 총합의 1이므로

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{10}kx(x+1)&=k\sum_{x=1}^{10}(x^2+x)\\&=k\times\left(\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\right)\end{aligned}$$

$=440k=1$

따라서 $k=\dfrac{1}{440}$

$$\mathrm{E}(4X)=4\sum_{x=1}^{10} x\mathrm{P}(X=x)$$
$$=4\sum_{x=1}^{10} \frac{1}{440}x^2(x+1)$$
$$=\frac{4}{440}\sum_{k=1}^{10}(x^3+x^2)$$
$$=\frac{1}{110}\left\{\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+\frac{10\times11\times21}{6}\right\}$$
$$=31$$

정답 ②

167 확률질량함수

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

조건을 만족하는 확률질량함수의 관계식에서 미지수를 묻는 문제를 조건을 만족하는 확률질량함수를 구하여 확률의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$\mathrm{P}(X=1)=a$라 하면

$k=1$일 때 $\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X=1)=a$

$k=2$일 때 $\mathrm{P}(X=3)=2\mathrm{P}(X=2)=2a$

$k=3$일 때 $\mathrm{P}(X=4)=3\mathrm{P}(X=3)=6a$

$k=4$일 때 $\mathrm{P}(X=5)=4\mathrm{P}(X=4)=24a$

$$\sum_{k=1}^{5}\mathrm{P}(X=k)=a+a+2a+6a+24a=34a=1$$

따라서 $a=\dfrac{1}{34}$

$\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=2a+6a=8a=\dfrac{8}{34}=\dfrac{4}{17}$이므로

$p+q=17+4=21$

정답 21

168 이항분포의 평균과 분산

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

이항분포에서 분산을 묻는 문제를 기댓값의 조건을 만족하는 자연수 n의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

두 학생이 가위바위보를 하여 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $3\times3=9$

이 중에 A학생이 이기는 경우는 (바위, 가위), (가위, 보), (보, 바위) 의 세 가지 경우이므로 A학생이 이길 확률은 $\dfrac{1}{3}$

두 학생 A, B가 가위바위보를 n번 시행하였을 때 A학생이 이긴 횟수를 확률변수 Y라고 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르고 이때 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(Y=y)={}_n\mathrm{C}_y\left(\frac{1}{3}\right)^y\left(\frac{2}{3}\right)^{n-y}\ (y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$\mathrm{E}(Y)=np=\dfrac{n}{3}$

A학생이 얻는 점수의 합은 $X=3Y+(n-Y)=2Y+n$이므로

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(2Y+n)=2\mathrm{E}(Y)+n=\frac{2}{3}n+n=\frac{5}{3}n$$

$\dfrac{5}{3}n\geq60$이므로

$n\geq36$

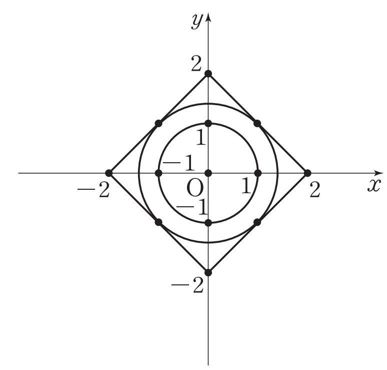
따라서 자연수 n의 최솟값은 36

정답 36

169 확률변수 $aX+b$의 평균과 분산

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

좌표평면에서 확률변수를 정의하고 분산을 묻는 문제를 부등식의 영역을 이용하여 확률변수를 정의하고 기댓값을 묻는 문제로 변형하였다.



오른쪽 그림과 같이 x좌표와 y좌표가 모두 정수이고 부등식 $|x|+|y|\leq2$를 만족시키는 점의 개수는 13이므로 서로 다른 두 점을 택하는 경우의 수는 ${}_{13}\mathrm{C}_2=78$

2점을 나타내는 점의 개수는 5, 1점을 나타내는 점의 개수는 4, 0점을 나타내는 점의 개수는 4

$X=0$인 경우 0점을 나타내는 점 2개를 택해야 하므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{78}=\frac{1}{13}$$

$X=1$인 경우 1점을 나타내는 점 1개와 0점을 나타내는 점 1개를 택해야 하므로 $\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{78}=\dfrac{8}{39}$

$X=2$인 경우 1점을 나타내는 점 2개 또는 2점을 나타내는 점 1개와 0점을 나타내는 점 1개를 택해야 하므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{78}+\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{78}=\frac{26}{78}=\frac{1}{3}$$

$X=3$인 경우 2점을 나타내는 점 1개와 1점을 나타내는 점 1개를 택해야 하므로

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{78}=\frac{20}{78}=\frac{10}{39}$$

$X=4$인 경우 2점을 나타내는 점 2개를 택해야 하므로

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{78}=\frac{10}{78}=\frac{5}{39}$$

그러므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{39}$	$\frac{5}{39}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{8}{39}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{10}{39}+4\times\frac{5}{39}$$
$$=\frac{8+26+30+20}{39}=\frac{84}{39}=\frac{28}{13}$$

이므로 $\mathrm{E}(13X+4)=13\mathrm{E}(X)+4=13\times\dfrac{28}{13}+4=32$

정답 ②

7	연속확률변수의 확률분포	p. 82~84

3점 예상	170 ⑤	171 ③	172 23
4점 예상	173 ⑤	174 ①	175 ①

170 연속확률변수의 확률분포

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

연속확률변수의 확률밀도함수를 주어진 확률 조건을 이용하여 미지수를 구한 후 확률을 묻는 문제를 확률밀도함수의 대칭조건을 이용하여 확률밀도함수를 구한 후 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

$-3\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이고 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭이므로 $0\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이는 $\frac{1}{2}$이다.

$\frac{1}{2}\times 3\times(4a+a)=\frac{15}{2}a=\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{15}$

$$\begin{aligned}P(-2\le x\le 1)&=P(-2\le x\le 0)+P(0\le x\le 1)\\&=P(0\le x\le 2)+P(0\le x\le 1)\\&=\frac{1}{2}\times 2\times\left(\frac{4}{15}+\frac{2}{15}\right)+\frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{4}{15}+\frac{3}{15}\right)\\&=\frac{6}{15}+\frac{7}{30}\\&=\frac{19}{30}\end{aligned}$$

정답 ⑤

171 정규분포

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

정규분포곡선의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 확률을 묻는 문제를 정규분포 곡선에서 제한된 범위의 확률이 최대일 때 기댓값을 구한 후 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=P(x\le X\le x+8)$가 $x=32$에서 최댓값을 가지므로

$E(X)=\frac{32+(32+8)}{2}=36$

확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=36$에 대하여 대칭이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.

$P(X\ge 40)=0.31$이므로

$P(36\le X\le 40)=0.5-P(X\ge 40)=0.5-0.31=0.19$

즉, $P(32\le X\le 36)=P(36\le X\le 40)=0.19$

$P(26\le X\le 32)=P(40\le X\le 46)=0.20$

$$\begin{aligned}P(36\le X\le 46)&=P(36\le X\le 40)+P(40\le X\le 46)\\&=0.19+0.2=0.39\end{aligned}$$

즉, $P(X\ge 46)=1-P(36\le X\le 46)=0.5-0.39=0.11$

따라서 $P(32\le X\le 36)+P(X\ge 46)=0.19+0.11=0.30$

정답 ③

172 이항분포와 정규분포의 관계

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

이차함수의 판별식과 이항분포를 이용하여 원하는 확률을 만족하는 미지수의 값을 묻는 문제를 원과 직선의 관계를 이용하여 조건을 만족하는 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

직선 $ax+by+5=0$과 원 $x^2+y^2=1$이 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $ax+by+5=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1보다 작아야 한다.

즉, $\frac{5}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$

$25<a^2+b^2$ ⋯⋯ ㉠

이어야 한다.

한편 두 개의 주사위를 던져서 나오는 모든 경우의 수는 36이고 이 중 ㉠을 만족시키는 경우는

(1, 5), (1, 6)
(2, 5), (2, 6)
(3, 5), (3, 6)
(4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)

이므로 한 번의 시행에서 직선과 원이 서로 다른 두 점에서 만날 확률은

$\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$

이 시행을 1260회 반복했을 때 직선과 원이 서로 다른 두 점에서 만나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(1260,\ \frac{7}{12}\right)$를 따른다.

$E(X)=1260\times\frac{7}{12}=735,\ V(X)=1260\times\frac{7}{12}\times\frac{5}{12}=\left(\frac{35}{2}\right)^2$

이때 시행횟수가 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(735,\ 17.5^2)$을 따른다.

$$\begin{aligned}P(X\le 700)&=P\left(Z\le\frac{700-735}{17.5}\right)\\&=P(Z\le -2)\\&=P(Z\ge 2)\\&=0.5-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.477\\&=0.023\end{aligned}$$

따라서 $1000P=1000\times 0.023=23$

정답 23

173 정규분포

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

정규분포를 따르는 두 확률변수의 확률이 같아지는 미지수를 묻는 문제를 정규분포를 따르는 두 확률변수의 확률이 같을 때 확률변수의 기댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

$$\begin{aligned}P(22\le X\le 26)&=P\left(\frac{22-30}{\sigma}\le Z\le\frac{26-30}{\sigma}\right)\\&=P\left(-\frac{8}{\sigma}\le Z\le -\frac{4}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}(44\le Y\le a)=\mathrm{P}\left(\frac{44-m}{\frac{\sigma}{2}}\le Z\le\frac{46-m}{\frac{\sigma}{2}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{88-2m}{\sigma}\le Z\le\frac{92-2m}{\sigma}\right)$$

(i) $\mathrm{P}\left(-\frac{8}{\sigma}\le Z\le-\frac{4}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{88-2m}{\sigma}\le Z\le\frac{92-2m}{\sigma}\right)$인 경우

$-4=92-2m$, $m=48$

(ii) $\mathrm{P}\left(\frac{4}{\sigma}\le Z\le\frac{8}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{88-2m}{\sigma}\le Z\le\frac{92-2m}{\sigma}\right)$인 경우

$8=92-2m$, $m=42$

따라서 m의 최솟값은 42

정답 ⑤

174 표준정규분포

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

표준정규분포표를 이용하여 정규분포를 따르는 확률변수의 조건을 만족하는 확률을 묻는 문제를 정규분포를 따르는 두 확률변수 사이의 관계를 이용하여 기댓값과 분산을 구한 후 표준정규분포표를 이용하여 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

A기계에서 박음질된 부분의 길이를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(26,\ \sigma^2)$을 따르고 B기계에서 박음질된 부분의 길이를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(27.2,\ 4\sigma^2)$을 따른다.
A기계에서 박음질되는 부분의 길이의 불량률은 5%이므로

$$\mathrm{P}(24.4\le X\le 27.6)=\mathrm{P}\left(\frac{24.4-26}{\sigma}\le Z\le\frac{27.6-26}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(-\frac{1.6}{\sigma}\le Z\le\frac{1.6}{\sigma}\right)$$
$$=1-0.05$$
$$=0.95$$

$\frac{1.6}{\sigma}=2$이므로 $\sigma=0.8$

즉 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(27.2,\ 1.6^2)$을 따르므로 B기계에서 박음질된 부분의 길이가 정상으로 분류될 확률은

$$\mathrm{P}(24.4\le Y\le 27.6)=\mathrm{P}\left(\frac{24.4-27.2}{1.6}\le Z\le\frac{27.6-27.2}{1.6}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(-\frac{2.8}{1.6}\le Z\le\frac{0.4}{1.6}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1.75\le Z\le 0.25)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.75)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.25)$$
$$=0.4599+0.0987$$
$$=0.5586$$

따라서 불량률은 $1-0.5586=0.4414$

정답 ①

175 정규분포

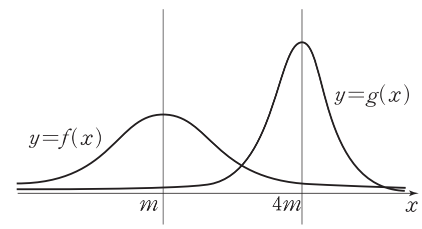
이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

정규분포를 따르는 두 확률변수에 대해서 조건식이 성립할 때 평균과 분산과 확률에 대한 합답형 문제를 기댓값과 분산이 각각 주어진 두 확률변수의 조건에 따른 함숫값의 범위에 대한 합답형 문제로 변형하였다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 각각 직선 $x=m$, $x=4m$에 대해 대칭이다.

ㄱ. $\sigma_1=\sigma_2$이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모양은 서로 같다. 곡선 $y=f(x-2m)$은 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $2m$만큼 평행이동한 곡선이므로 직선 $x=3m$에 대하여 대칭이고, 곡선 $y=g(x+m)$은 곡선 $y=g(x)$를 x축의 방향으로 $-m$만큼 평행이동한 곡선이므로 직선 $x=3m$에 대하여 대칭이다.
그러므로 $f(x-2m)=g(x+m)$이다. (참)

ㄴ. $\sigma_1>\sigma_2$이면 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$보다 완만하다.
그러므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$



는 $m<x<4m$, $x>4m$에서 각각 한 점에서 만난다.
즉, $f(\alpha)=g(\alpha)$이면 $m<\alpha<4m$ 또는 $\alpha>4m$이다. (거짓)

ㄷ. $\mathrm{P}(X\le 3m)=\mathrm{P}(Y\ge 3m)$이면

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3m-m}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{3m-4m}{\sigma_2}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{2m}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{-m}{\sigma_2}\right)$

$\frac{2m}{\sigma_1}=\frac{m}{\sigma_2}$이어야 하므로 $2\sigma_2=\sigma_1$

즉, $\sigma_1>\sigma_2$이므로 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$보다 완만하고 각 곡선의 대칭축에서의 함숫값 $g(4m)$, $f(m)$의 대소 관계는 $g(4m)>f(m)$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

정답 ①

8 통계적 추정

p. 85~86

3점 예상	176 ④	177 ①	178 90
4점 예상	179 ③	180 369	

176 표본평균의 확률분포

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

크기가 주어진 표본평균의 확률분포를 만족하는 미지수를 묻는 문제를 표본평균이 어떤 범위 안에 들기 위한 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.

이 지역에서 판매되는 생과일주스 1잔의 가격을 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3500,\ 200^2)$을 따른다. 즉, $\mathrm{E}(X)=3500$, $\mathrm{V}(X)=200^2$, $\sigma(X)=200$

크기가 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=3500$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{200^2}{25}=40^2$, $\sigma(\overline{X})=\frac{200}{\sqrt{25}}=40$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(3500,\ 40^2)$을 따르고, 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-3500}{40}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다. 표본평균 $\overline{X}$의 최

소평균가격을 k원이라 하면

$P(\overline{X} \geq k)=0.0228$

$P\left(Z \geq \frac{k-3500}{40}\right)=0.0228$

$P\left(Z \geq \frac{k-3500}{40}\right)=0.5-P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-3500}{40}\right)=0.0228$

$P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-3500}{40}\right)=0.4772$

$\frac{k-3500}{40}=2$

따라서 $k=3500+2 \times 40=3580$

정답 ④

177 모평균의 추정

이 문제의 변형 포인트!	**문항의 축소, 확대 변형**

크기가 다를 때 표본평균을 이용한 신뢰구간을 묻는 문제를 표본의 크기에 따른 신뢰구간의 길이를 묻는 문제로 변형하였다.

크기가 36인 표본으로부터 구한 표본평균의 값을 $\overline{x_1}$라 하면

이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96 \times \frac{\sigma}{6} \leq m \leq \overline{x_1}+1.96 \times \frac{\sigma}{6}$

이므로

$b-a=2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{6}=12$

따라서 $\sigma=\frac{36}{1.96}$ ⋯⋯ ㉠

크기가 100인 표본으로부터 구한 표본평균의 값을 $\overline{x_2}$라 하면

이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-1.96 \times \frac{\sigma}{10} \leq m \leq \overline{x_2}+1.96 \times \frac{\sigma}{10}$

㉠을 대입하면

따라서 $d-c=2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{10}=\frac{72}{10}=\frac{36}{5}$

정답 ①

178 모평균의 추정

이 문제의 변형 포인트!	**자료 상황의 활용**

표본의 크기와 신뢰구간이 주어졌을 때 표준편차를 묻는 문제를 표본의 크기와 신뢰구간이 주어졌을 때 표본평균과 표준편차의 곱을 묻는 문제로 변형하였다.

표본평균 $\overline{X}$를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{X}-1.96 \times \frac{\sigma}{8} \leq m \leq \overline{X}+1.96 \times \frac{\sigma}{8}$

따라서 $\overline{X}-1.96 \times \frac{\sigma}{8}=30.8$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{X}+1.96 \times \frac{\sigma}{8}=32.2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 양변을 더하면

$2\overline{X}=63$

$\overline{X}=\frac{63}{2}=31.5$

이를 ㉠에 대입하면

$\sigma=(31.5-30.8) \times \frac{8}{1.96}=0.7 \times \frac{2}{0.49}=\frac{20}{7}$

따라서 $\overline{X} \times \sigma=31.5 \times \frac{20}{7}=4.5 \times 20=90$

정답 90

179 모평균의 추정

이 문제의 변형 포인트!	**자료 상황의 활용**

신뢰구간의 길이에 대한 조건이 주어졌을 때 표본의 크기의 최솟값을 묻는 문제를 표본의 크기를 두 가지로 하여 구한 신뢰구간 사이의 관계식을 이용하여 표본의 크기의 최댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 98인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{98}} \leq m \leq \overline{x_1}+1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{98}}$

따라서 $b-a=2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{98}}$

같은 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x_2}+2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서 $d-c=2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$43(b-a) \leq 28(d-c)$

$43 \times 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{98}} \leq 28 \times 2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\frac{7}{\sqrt{98}} \leq \frac{6}{\sqrt{n}}$

$7\sqrt{n} \leq 6 \times \sqrt{98}$

즉, $49n \leq 6^2 \times 98$

따라서 $n \leq 72$이므로 n의 최댓값은 72

정답 ③

180 표본비율의 확률분포

이 문제의 변형 포인트!	**자료 상황의 활용**

표본의 크기가 정해진 표본비율을 이용하여 조건을 만족하는 미지수를 묻는 문제를 표본의 크기가 정해진 표본비율을 이용하여 조건을 만족하는 미지수의 값들의 곱을 묻는 문제로 변형하였다.

이 농장에서 재배하는 귤 중 임의추출한 200개 중에서 특상품인 것의 비율을 $\hat{p}$이라 하면

$E(\hat{p})=p$, $V(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{200}$, $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}$

확률변수 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(p, \frac{p(1-p)}{200}\right)$을 따르고, 확률변수 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}}$은 근사적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(\hat{p} \geq 0.15)=P\left(Z \geq \frac{0.15-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}}\right)$

$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{0.15-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}}\right)=0.0401$$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{0.15-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}}\right)=0.4599$이므로 $\frac{0.15-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}}=1.75$

$$\frac{\frac{3-20p}{20}}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{10\sqrt{2}}}=\frac{7}{4}$$

$2\sqrt{2}(3-20p)=7\sqrt{p(1-p)}$

양변을 제곱하면

$3249p^2-1009p+72=0$

근과 계수와의 관계에 의해서

p의 값들의 곱은 $\frac{72}{3249}=\frac{8}{361}$

따라서 $a+b=8+361=369$

정답 369