빠른 정답

PART 1 미적분 Ⅱ

01 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

001 ③ 002 ① 003 338 004 ② 005 ⑤ 006 ② 007 ③ 008 25 009 ⑤

02 지수함수와 로그함수의 도함수

010 5 011 ① 012 ⑤ 013 ③ 014 ⑤ 015 ① 016 ④ 017 ② 018 ③ 019 ③

03 삼각함수의 뜻과 그래프

020 ② 021 ② 022 ④ 023 ⑤ 024 ② 025 ① 026 ③ 027 65 028 ④ 029 70

04 삼각함수의 미분

030 ④ 031 4 032 24 033 ② 034 ① 035 ③ 036 ④ 037 ① 038 13 039 ③

05 여러 가지 미분법

040 ③ 041 ③ 042 ③ 043 ② 044 ③ 045 ② 046 ⑤ 047 ① 048 ② 049 ② 050 ③ 051 ①

06 도함수의 활용

052 ③ 053 ② 054 ① 055 ④ 056 ⑤ 057 ② 058 ③ 059 ③ 060 ③ 061 17 062 ①

07 여러 가지 적분법

063 ② 064 ④ 065 ② 066 ③ 067 ② 068 ③ 069 ② 070 ③ 071 ① 072 ⑤ 073 ①

08 정적분의 활용

074 ④ 075 ② 076 ④ 077 ③ 078 ② 079 ① 080 ⑤ 081 ③ 082 ② 083 ④ 084 ①

PART 2 기하와 벡터

01 이차곡선

085 ② 086 26 087 43 088 ③ 089 18 090 74 091 16 092 ① 093 ③ 094 ⑤

02 평면 곡선의 접선

095 39 096 31 097 ⑤ 098 ⑤ 099 ⑤ 100 250 101 ⑤ 102 20

03 평면벡터의 연산

103 ④ 104 ③ 105 ① 106 32 107 ⑤

04 평면벡터의 성분과 내적

108 14 109 ① 110 ⑤ 111 ① 112 ④ 113 ② 114 42

05 평면 곡선과 평면 운동

115 ③ 116 ② 117 ⑤ 118 ① 119 ④

06 공간도형

120 ① 121 ④ 122 ⑤ 123 ③ 124 39 125 ①

07 공간좌표

126 ⑤ 127 ③ 128 ④ 129 ② 130 ⑤ 131 ③ 132 ⑤ 133 7

08 공간벡터

134 ④ 135 ① 136 ② 137 ⑤ 138 ② 139 ⑤ 140 12

09 도형의 방정식

141 ⑤ 142 ② 143 ⑤ 144 ④ 145 ① 146 ③ 147 33 148 216 149 ④ 150 ④

PART 3 확률과 통계

01 순열

151 72 152 ③ 153 ⑤ 154 50

02 조합

155 ⑤ 156 ③ 157 ③ 158 ② 159 ⑤ 160 31 161 ②

03 분할과 이항정리

162 ② 163 ③ 164 ② 165 ③ 166 780

04 확률

167 ② 168 ③ 169 ⑤ 170 ② 171 23 172 37 173 ① 174 ⑤

05 조건부확률

175 ② 176 ④ 177 ⑤ 178 ③ 179 650 180 155 181 ④ 182 ① 183 ②

06 이산확률변수의 확률분포

184 ③ 185 ② 186 ② 187 21 188 36 189 ②

07 연속확률변수의 확률분포

190 ⑤ 191 ③ 192 23 193 ⑤ 194 ① 195 ①

08 통계적 추정

196 ④ 197 ① 198 90 199 ③ 200 369

PART 1 미적분Ⅱ

1 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

p. 14~16

3점 예상	001 ③	002 ①	003 338	004 ②	005 ⑤
	006 ②	007 ③			
4점 예상	008 25	009 ⑤			

001 지수에 미지수가 있는 부등식

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

지수부등식을 치환해서 풀 수 있는지를 묻는 문제를 치환했을 때 단순히 계수가 다른 이차부등식을 풀 수 있는지를 묻는 문제로 변형하였다.

$(\sqrt{2})^x=t$로 놓으면 $2^x=t^2$이므로 주어진 부등식은 $2t^2-9t+4\le 0$

$(2t-1)(t-4)\le 0$

$\frac{1}{2}\le t\le 4$

$\frac{1}{2}\le(\sqrt{2})^x\le 4$

$\frac{1}{4}\le 2^x\le 16$

$-2\le x\le 4$

따라서 구하는 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4로 합은 7

정답 ③

002 로그의 진수에 미지수가 있는 부등식

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

로그의 진수에 미지수가 있는 부등식을 진수 조건을 고려하면서 풀 수 있는지를 묻는 문제를 로그함수 대신 지수함수가 주어짐으로써 역함수를 이용해서 식을 정리하고 근을 구할 수 있는지를 묻는 문제로 변형하였다.

$y=f(x)=2^{x-1}+3$에서 $y-3=2^{x-1}$

$x-1=\log_2(y-3)$

$x=\log_2(y-3)+1$

이므로 x, y를 바꾸면 $f^{-1}(x)=\log_2(x-3)+1$ …… ㉠

부등식 $f^{-1}(x)+f^{-1}(x+3)<\log_2 16x$에서

$\log_2(x-3)+1+\log_2(x+3-3)+1<\log_2 16x$

$\log_2(x-3)+\log_2 x+2<\log_2 16x$

$\log_2 4x(x-3)<\log_2 16x$

$4x(x-3)<16x$

$4x^2-28x<0$

$4x(x-7)<0$

$0<x<7$

이때 ㉠의 진수 조건에서 $x>3$이므로 $3<x<7$

따라서 구하는 자연수 x의 값은 4, 5, 6이고

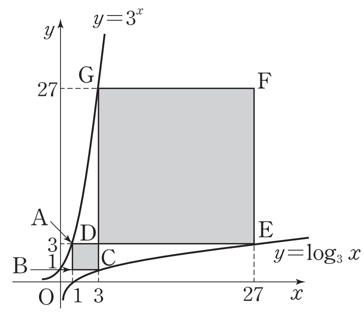
그 합은 $4+5+6=15$

정답 ①

003 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프의 대칭성

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

지수함수와 로그함수의 그래프에서 좌표를 찾고 좌표로 이루어진 도형의 넓이를 묻는 문제를 역함수 관계에 있는 지수함수와 로그함수에서 좌표를 이용해서 점들을 찾고 문제에서 원하는 점들로 이루어진 도형의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.



두 함수 $y=3^x$와 $y=\log_3 x$는 서로 역함수 관계이므로 점 A와 C, 점 G와 E는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 A의 x좌표가 1이므로 점 A(1, 3), 점 C의 y좌표가 1이므로 점 C(3, 1)이 된다.

마찬가지로 각 점의 좌표를 정사각형임을 이용하여 구하면 B(1, 1), D(3, 3), E(27, 3), G(3, 27), F(27, 27)이 된다.

사각형 ACEG는 등변사다리꼴이고 $\overline{AC}=2\sqrt{2}$, $\overline{EG}=24\sqrt{2}$이고 사다리꼴의 높이는 점 C에서 직선 EG까지의 거리를 구하면 된다.

직선 EG의 방정식은 $y=-x+30$이므로 점 C에서 직선 EG까지의 거리는 $\frac{|3+1-30|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{26}{\sqrt{2}}$

따라서 사각형 ACEG의 넓이는

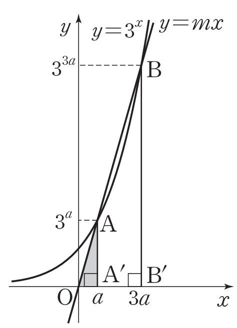
$\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+24\sqrt{2})\times\frac{26}{\sqrt{2}}=13\times 26=338$

정답 338

004 로그함수의 그래프

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

지수함수 위의 서로 다른 두 점의 중점이 원점이 될 때 선분의 길이를 묻는 문제를 내분점을 이용한 기울기를 묻는 문제로 변형하였다.



두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하자. 점 A가 선분 OB를 1 : 2로 내분하므로 $\overline{OA}:\overline{OB}=1:3$이다.

따라서 $\overline{A'A}:\overline{B'B}=1:3$이므로

점 A의 좌표를 $(a, 3^a)$으로 놓으면 점 B의 좌표는 $(3a, 3^{3a})$이 되고

$3^{3a}=3\times 3^a$이 성립하므로

$3a=a+1$, $a=\frac{1}{2}$

점 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, 3^{\frac{1}{2}}\right)$은 직선 $y=mx$ 위의 점이므로 $3^{\frac{1}{2}}=m\times\frac{1}{2}$

따라서 $m=2\sqrt{3}$

정답 ②

005 지수함수의 그래프

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

서로 다른 두 지수함수 그래프에서 두 점 사이의 거리를 이용해서 미지수를 묻는 문제를 기울기가 있는 직선과 평행이동 관계에 있는 두 지수함수 그래프의 관계와 거리를 이용하여 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

직선 $y=-x+1$과 곡선 $y=2^x$은 모두 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 A $(0,\ 1)$

함수 $y=2^{x+k}+k$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다. 점 A를 x축의 방향으로 $-k$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점은 직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로 $\mathrm{B}(-k,\ 1+k)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{k^2+k^2}=\sqrt{2k^2}=8$

$k^2=32$이므로 $k=\pm4\sqrt{2}$

따라서 모든 상수 k의 값의 곱은 -32 **정답 ⑤**

006 로그의 진수에 미지수가 있는 방정식

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

절대부등식을 만족하는 미지수를 묻는 문제를 근의 분리 문제로 심화되어 미지수의 값이나 범위를 묻는 문제로 변형하였다.

$(\log_3 x)^2-2k\log_3 x+k+2=0$ …… ㉠

$\log_3 x=t$라 하면

$t^2-2kt+k+2=0$ …… ㉡

㉠이 x가 3보다 큰 범위에서 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 ㉡이 t가 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-2kt+k+2$라 하면

(i) $f(1)>0$이어야 하므로 $1-2k+k+2>0$, $k<3$ …… ㉢

(ii) 함수 $f(t)$의 대칭축이 직선 $t=1$보다 오른쪽에 있어야 하므로

$\frac{2k}{2}>1$, $k>1$ …… ㉣

(iii) 이차방정식 $f(t)=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-(k+2)>0$

$(k+1)(k-2)>0$, $k<-1$ 또는 $k>2$ …… ㉤

㉢, ㉣, ㉤에 의하여 $2<k<3$ **정답 ②**

007 진수에 미지수가 있는 부등식

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

로그부등식을 그래프를 이용하여 해결할 수 있는지를 묻는 문제를 진수의 조건을 만족하면서 로그부등식을 그래프를 이용하여 해결할 수 있는지를 묻는 문제로 변형하였다.

$\log_{\frac{1}{2}} xf(x)>\log_{\frac{1}{2}} xg(x)$에서 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$xg(x)>xf(x)>0$

(i) $x>0$일 때, $g(x)>f(x)>0$이며 $c<x<d$

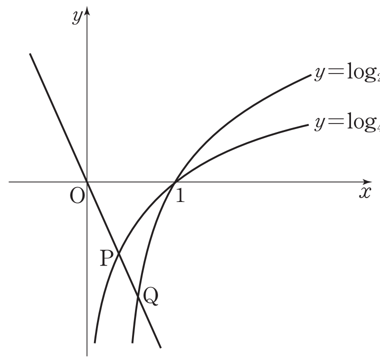
(ii) $x<0$일 때, $g(x)<f(x)<0$이므로 해가 없다.

따라서 부등식을 만족하는 x 값의 범위는 $c<x<d$ **정답 ③**

008 로그함수의 그래프의 성질

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

로그방정식을 근과 계수와의 관계를 이용해서 해결할 수 있는지를 묻는 문제를 로그함수와 직선이 주어진 조건을 만족하도록 하는 좌표를 묻는 문제로 변형하였다.



곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 Q의 x좌표를 $a(a>0)$라 하면

$\mathrm{Q}(a,\ \log_2 a)$

점 Q가 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$를 4 : 1로 외분하면 $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PQ}}=3:1$

따라서 점 P는 선분 OQ를 3:1로 내분하는 점이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{3}{4}a,\ \frac{3}{4}\log_2 a\right)$

그런데 점 P는 곡선 $y=\log_4 x$ 위의 점이므로 $\mathrm{P}\left(\frac{3}{4}a,\ \log_4 \frac{3}{4}a\right)$

즉, $\frac{3}{4}\log_2 a=\log_4 \frac{3}{4}a$에서 $\frac{3}{4}\log_2 a=\frac{1}{2}\log_2 \frac{3}{4}a$

$\frac{3}{2}\log_2 a=\log_2 \frac{3}{4}a$, $\log_2 a^{\frac{3}{2}}=\log_2 \frac{3}{4}a$

$a^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{4}a$, $a^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}(\because a>0)$, $a=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

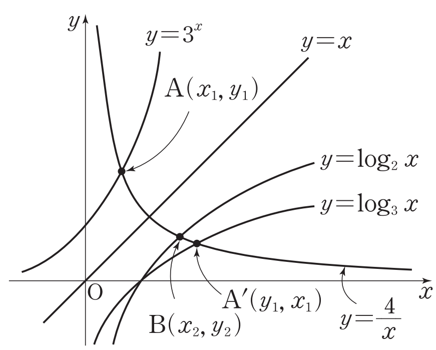
따라서 점 Q의 x좌표는 $\frac{9}{16}$이고, $p+q=25$ **정답 25**

009 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

여러 로그함수가 서로 만나는 점의 위치나 대소 관계를 묻는 문제를 역함수 관계인 지수함수와 로그함수에 유리함수까지 이용하여 평균변화율이나 연산의 참 거짓 등을 묻는 문제로 변형하였다.

$y=3^x$의 그래프와 $y=\log_3 x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=\log_3 x$의 그래프와 곡선 $y=\frac{4}{x}$의 교점의 좌표는 $\mathrm{A}'(y_1,\ x_1)$



ㄱ. $y_1=\frac{4}{x_1}$, $y_2=\frac{4}{x_2}$에서 $x_1y_1=4$, $x_2y_2=4$ …… ㉠

$\mathrm{A}'(y_1,\ x_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에서 $x_2<y_1$이므로

$4=x_1y_1>x_1x_2$

따라서 $\sqrt{x_1x_2}<2$ (참)

ㄴ. (직선 A′B의 기울기)$=\dfrac{x_1-y_2}{y_1-x_2}$이고 -1보다 크다.

즉, $\dfrac{x_1-y_2}{y_1-x_2}>-1$

그런데 ㄱ에서 $x_2<y_1$이므로 $y_1-x_2>0$

$x_1-y_2>x_2-y_1$, 따라서 $x_1-x_2>y_2-y_1$ (참)

ㄷ. $3^{x_1}=y_1$, $\log_2 x_2=y_2$에서

$3^{x_1}=y_1$, $2^{y_2}=x_2$

이때 $y_1^{\,y_1}=(3^{x_1})^{y_1}=3^{x_1y_1}=3^4$, $x_2^{\,x_2}=(2^{y_2})^{x_2}=2^{x_2y_2}=2^4$이므로 ($\because$ ㉠)

$$\begin{aligned}y_1\log_6 y_1+x_2\log_6 x_2&=\log_6 y_1^{\,y_1}+\log_6 x_2^{\,x_2}\\&=\log_6 y_1^{\,y_1}x_2^{\,x_2}\\&=\log_6 3^42^4\\&=\log_6 6^4\\&=4\ (\text{참})\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

2 지수함수와 로그함수의 도함수

p. 17~20

3점 예상	010 5	011 ①	012 ⑤	013 ③	014 ⑤
	015 ①	016 ④			
4점 예상	017 ②	018 ③	019 ③		

010 지수함수의 도함수

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

미분계수의 정의를 이용한 지수함수와 다항함수의 간단한 곱셈 꼴의 미분계수를 묻는 문제를 여러 개의 다항함수와 지수함수의 연속한 곱셈 꼴로 이루어진 함수를 양변에 로그를 취해서 미분한 도함수의 극한값을 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)>0$이므로 함수 $f(x)$에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned}\ln f(x)&=\ln\{(x^2+1)(e^x+1)(e^{2x}+1)(e^{3x}+1)(e^{4x}+1)\}\\&=\ln(x^2+1)+\ln(e^x+1)+\ln(e^{2x}+1)+\ln(e^{3x}+1)\\&\qquad+\ln(e^{4x}+1)\end{aligned}$$

이므로 위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}+\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}+\frac{4e^{4x}}{e^{4x}+1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{f(x)}&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{2x}{x^2+1}+\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}+\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}+\frac{4e^{4x}}{e^{4x}+1}\right\}\\&=0+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}=\frac{10}{2}=5\end{aligned}$$

정답 5

011 지수함수의 도함수

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

다항함수와 지수함수의 곱셈 꼴의 미분에서 실근이 존재하기 위한 미지수를 묻는 문제를 다항함수와 지수함수의 곱셈 꼴의 미분에서 실근의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)=axe^{-(x-2)^2}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=(ax)'e^{-(x-2)^2}+ax\{e^{-(x-2)^2}\}'\\&=a\times e^{-(x-2)^2}+axe^{-(x-2)^2}\times\{-(x-2)^2\}'\\&=ae^{-(x-2)^2}+axe^{-(x-2)^2}\times\{-2(x-2)\}\\&=-e^{-(x-2)^2}\{-a+2ax(x-2)\}\\&=-e^{-(x-2)^2}\{2ax^2-4ax-a\}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$의 실근은 $2ax^2-4ax-a=0$에서 나온다.

$2ax^2-4ax-a=a(2x^2-4x-1)=0$

따라서 $f'(x)=0$의 실근은

$x=\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

(또는 근과 계수와의 관계를 사용하여 구해도 된다.)

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은 2

정답 ①

012 로그함수의 도함수

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

미분계수의 정의를 이용한 로그함수의 미분계수를 묻는 문제를 함수식을 치환하여 미분계수를 묻는 문제로 변형하였다.

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{2^x+3^x+4^x+5^x+6^x}{5}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(2^x+3^x+4^x+5^x+6^x)-\ln 5}{x}$$

$f(x)=\ln(2^x+3^x+4^x+5^x+6^x)$라 하면

$f(0)=\ln 5$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(2^x+3^x+4^x+5^x+6^x)-\ln 5}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

따라서 $f'(x)=\dfrac{2^x\ln 2+3^x\ln 3+4^x\ln 4+5^x\ln 5+6^x\ln 6}{2^x+3^x+4^x+5^x+6^x}$이므로

$$f'(0)=\frac{\ln 2+\ln 3+\ln 4+\ln 5+\ln 6}{5}=\frac{\ln 720}{5}$$

정답 ⑤

013 지수함수와 로그함수의 극한

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

지수함수의 극한의 성질을 이용해서 로그함수의 극한을 묻는 문제를 로그함수의 극한의 성질을 이용해서 지수함수의 극한을 묻는 문제로 변형하였다.

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{\ln x}=3$에서 $x-1=t$라 하면

$x\to1$일 때 $t\to0$이므로 $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{\ln(t+1)}=3$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{\ln(x+1)}\times\frac{\ln(x+1)}{e^{2x}-1}\right\}$이고

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{1}{2}\right\}=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{\ln(x+1)}\times\frac{\ln(x+1)}{e^{2x}-1}\right\}=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

정답 ③

014 무리수 e의 정의

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

로그의 극한의 성질을 이용한 극한값을 묻는 문제를 극한의 조건을 바꾸고 치환해서 극한값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \to \infty$일 때, $t \to 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to0+}tf\left(\frac{1}{t}\right)=3$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)\ln\left(1-\sin\frac{5}{x}\right)$$

$$=\lim_{t\to0+}f\left(\frac{1}{t}\right)\ln\left\{(1-\sin 5t)^{\frac{1}{-\sin 5t}}\right\}^{-\sin 5t}$$

$$=\lim_{t\to0+}f\left(\frac{1}{t}\right)\times(-\sin 5t)\times\ln\left\{(1-\sin 5t)^{\frac{1}{-\sin 5t}}\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+}5t\times f\left(\frac{1}{t}\right)\times\frac{-\sin 5t}{5t}=-5\lim_{t\to0+}tf\left(\frac{1}{t}\right)=-5\times3=-15$$

정답 ⑤

015 지수함수와 로그함수의 도함수

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

미분계수의 정의를 이용한 지수함수의 미분계수를 묻는 문제를 로그함수의 미분계수를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(1)=0$이므로 $\lim_{h\to1}\frac{f(h^3)}{h-1}=\ln 8$은

$$\lim_{h\to1}\frac{f(h^3)}{h-1}=\lim_{h\to1}\frac{f(h^3)-f(1)}{h^3-1}\times(h^2+h+1)$$

$$=3f'(1)=\ln 8$$

이때 $f(x)=2^x+ax\ln x-2$에서

$$f'(x)=2^x\ln 2+a\ln x+ax\times\frac{1}{x}=2^x\ln 2+a\ln x+a$$

$3f'(1)=3\times(2\ln 2+a)=\ln 8$

$6\ln 2+3a=3\ln 2$

$3a=3\ln 2-6\ln 2=-3\ln 2$

따라서 구하는 a의 값은 $-\ln 2$

정답 ①

016 지수함수의 극한과 연속

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

주어진 함수가 연속함수가 되는 미정계수를 묻는 문제를 구간에 따른 함수가 다양하게 출제되면서 미정계수를 묻는 문제로 변형하였다.

$x>0$에서 연속이고 $x<0$에서 연속이므로

$x=0$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이 되므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$를 만족해야 한다.

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{e^{x^3+3x}-1}{x}=\lim_{x\to0+}\left(\frac{e^{x^3+3x}-1}{x^3+3x}\times\frac{x^3+3x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{e^{x^3+3x}-1}{x^3+3x}\times\lim_{x\to0+}\frac{x(x^2+3)}{x}=1\times3=3$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(ax+b)=b$$

$f(0)=a$

따라서 $a=3$, $b=3$이므로 $a+b=6$

정답 ④

017 로그함수의 극한

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

그래프를 이용한 지수함수의 극한을 묻는 문제를 로그함수나 조건을 다르게 바꿔주면서 극한을 묻는 문제로 변형하였다.

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=1+\overline{OB}^2$에서 $\overline{AB}=\sqrt{1+\overline{OB}^2}$이므로

$\lim_{t\to1}\overline{AB}$의 값을 구하기 위하여 $\lim_{t\to1}\overline{OB}$의 값을 구하면 된다.

점 B의 좌표를 $B(0, a)$라 하자.

이때 삼각형 ABP가 이등변삼각형을 만족하며 점 B, P가 움직이므로

$\overline{AB}^2=\overline{PB}^2$이다.

$\overline{AB}^2=(1-0)^2+(0-a)^2=1+a^2$

$\overline{PB}^2=(t-0)^2+(\ln t-a)^2=t^2+(\ln t)^2-2a\ln t+a^2$

$1+a^2=t^2+(\ln t)^2-2a\ln t+a^2$

$$a=\frac{t^2-1}{2\ln t}+\frac{1}{2}\ln t$$

또한 $\lim_{t\to1}\overline{OB}=\lim_{t\to1}\left(\frac{t^2-1}{2\ln t}+\frac{1}{2}\ln t\right)=\lim_{t\to1}\frac{t^2-1}{2\ln t}\left(\because \lim_{t\to1}\ln t=0\right)$

$t-1=x$로 치환하면 $t\to1$일 때 $x\to0$이므로

$$\lim_{t\to1}\overline{OB}=\lim_{t\to1}\frac{t^2-1}{2\ln t}=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^2-1}{2\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+2)}{2\ln(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}}\times\lim_{x\to0}\frac{x+2}{2}=\frac{1}{\ln e}\times\frac{2}{2}=1$$

따라서 $\lim_{t\to1}\overline{AB}=\lim_{t\to1}\sqrt{1+\overline{OB}^2}=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}$

정답 ②

018 로그함수의 극한과 미분가능성

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

지수함수가 포함된 함수가 미분가능하도록 조건을 묻는 문제를 구간에 지수함수와 로그함수가 주어지면서 미분가능하도록 하는 미정계수를 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이므로

$$\lim_{x\to1-}(\ln x+a)=\lim_{x\to1+}(a\times3^x+b)=f(1)$$

$a=3a+b$, $b=-2a$

또한 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(\ln x+a)-a}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$=\lim_{t\to0-}\frac{\ln(t+1)}{t}\text{(단, }x-1=t\text{)}$$

$$=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(a\times3^x+b)-(3a+b)}{x-1}=a\lim_{x\to1+}\frac{3^x-3}{x-1}$$

이때 $g(x)=3^x$이라 하면 $g'(x)=3^x\ln3$

$$\lim_{x\to1+}\frac{3^x-3}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=3\ln3$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=3a\ln3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $3a\ln3=1$이므로 $a=\frac{1}{3\ln3}$, $b=-\frac{2}{3\ln3}$

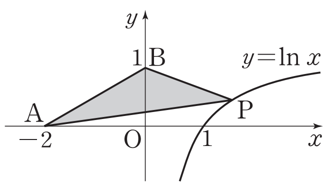
따라서 $a-b=\frac{1}{3\ln3}-\left(-\frac{2}{3\ln3}\right)=\frac{1}{\ln3}$

정답 ③

019 로그함수의 도함수

이 문제의 변형 포인트! 개념, 원리 활용

곡선 위의 점에서 직선까지의 거리의 최솟값을 묻는 문제를 곡선 위의 점을 이용하여 삼각형의 넓이의 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.



삼각형 PAB의 넓이가 최소가 되려면 삼각형의 밑변 AB는 고정되어 있으므로 삼각형의 높이가 최소가 되면 된다. 삼각형의 높이의 최솟값을 구하기 위해서 두 점 A $(-2, 0)$, B $(0, 1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$y-0=\frac{1-0}{0-(-2)}(x+2)$, $y=\frac{1}{2}(x+2)$

$y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 $y=\ln x$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 접점의 좌표를 구하면

$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$에서 $x=2$, $y=\ln2$

따라서 점 P가 $(2, \ln2)$에 있을 때 삼각형의 넓이가 최소가 된다.

삼각형의 높이는 점 P에서 직선 $x-2y+2=0$까지의 거리 d가 되므로

$$d=\frac{|2-2\ln2+2|}{\sqrt{1+4}}=\frac{4-2\ln2}{\sqrt5}$$

이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times d=\frac{1}{2}\times\sqrt{4+1}\times\frac{4-2\ln2}{\sqrt5}=2-\ln2$$

$a-\ln b=2-\ln2$이므로 $a=2$, $b=2$

따라서 $a+b=4$

정답 ③

3 삼각함수의 뜻과 그래프 p. 21~23

3점 예상	020 ②	021 ②	022 ④	023 ⑤	024 ②
	025 ①	026 ③	027 65		
4점 예상	028 ④	029 70			

020 삼각함수의 그래프

이 문제의 변형 포인트! 자료 상황의 활용

주어진 그래프를 보고 삼각함수의 x축 평행이동과 근을 묻는 문제를 그래프를 보고 주기, x축 평행이동, y축 평행이동에 따른 최댓값과 최솟값을 만족하는 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

주어진 함수의 최댓값이 5이므로 $2+c=5$, $c=3$

또, 주기가 π 이므로 $\frac{2\pi}{a}=\pi$, $a=2(\because a>0)$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\sin(2x-b)+3$

이때 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 5\right)$를 지나므로

$2\sin(\pi-b)+3=5$, $2\sin b+3=5$

$\sin b=1$, $b=\frac{\pi}{2}(\because 0<b<\pi)$

따라서 $abc=2\times\frac{\pi}{2}\times3=3\pi$

정답 ②

021 삼각함수의 성질

이 문제의 변형 포인트! 문항의 축소, 확대 변형

삼각함수의 성질을 이용한 연산 능력을 묻는 문제를 삼각함수의 성질을 이용해서 주어진 문제를 조건에 맞게 정리해서 연산할 수 있는 능력을 묻는 문제로 변형하였다.

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$, $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

따라서 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$$\tan\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta\tan^2\theta}\right)$$
$$=\tan\theta\times\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta\tan\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}}{\left(-\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{44}{9}$$

정답 ②

022 삼각함수의 그래프

이 문제의 변형 포인트! 문항의 축소, 확대 변형

상황에 맞는 삼각함수 공식들을 이용해서 삼각함수의 근을 묻는 문제를 삼각함수가 포함된 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용해서 삼각함수의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

이차방정식 $2x^2-x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수와의 관계에 의해

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{2}$ …… ㉡

이때 ㉠의 양변을 제곱하면 $\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$이며 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

㉡에서 $-\frac{3}{8}=\frac{k}{2}$, $k=-\frac{3}{4}$

이차방정식은 $2x^2-x-\frac{3}{4}=0$, $8x^2-4x-3=0$이며

$x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}$

그런데 θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$, $\cos\theta=\frac{1-\sqrt{7}}{4}$이며,

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{1+\sqrt{7}}{4}}{\frac{1-\sqrt{7}}{4}}=\frac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}=-\frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

따라서

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta=-\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{1}{-\frac{4+\sqrt{7}}{3}}=\frac{3}{4+\sqrt{7}}$$

$$=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

정답 ④

023 삼각함수의 활용

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

삼각함수가 포함된 이차방정식의 근을 묻는 문제를 이차방정식의 근이 삼각함수인 경우 삼각함수의 값이나 삼각방정식의 미정계수를 묻는 문제로 변형하였다.

방정식 $2\cos^2 x-4\sin x=a+1$에서

$2(1-\sin^2 x)-4\sin x=a+1$

$-2\sin^2 x-4\sin x+1=a$

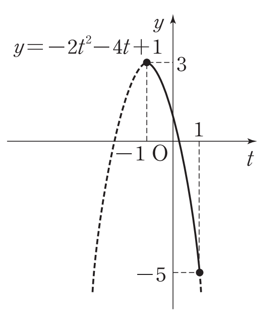
이때 $\sin x=t$로 놓으면

$-1\le\sin x\le1$이므로 $-1\le t\le1$

$-2t^2-4t+1=a$

방정식 $-2t^2-4t+1=a$를 만족시키는 실근이 존재하려면

함수 $y=-2t^2-4t+1=-2(t+1)^2+3$ $(-1\le t\le1)$



함수 $y=-2t^2-4t+1(-1\le t\le1)$은 $t=-1$일 때 최댓값 3

$t=1$일 때 최솟값 -5

이때 주어진 방정식이 실근을 가지려면 $-5\le a\le3$이어야 한다.

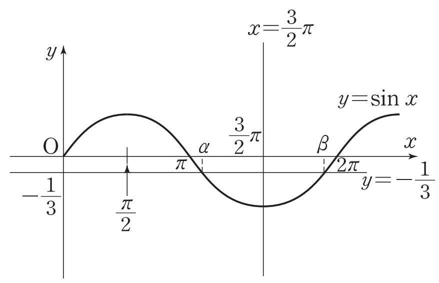
따라서 구하는 정수 a는 -5, -4, -3, …, 2, 3의 9개

정답 ⑤

024 삼각함수의 활용

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

삼각부등식의 해를 그래프의 대칭 성질을 이용하여 구한 후 삼각함수의 값을 묻는 문제를 유사한 형태의 삼각함수의 값을 묻는 문제로 변형하였다.



그림에서 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\alpha+\beta=2\times\frac{3}{2}\pi=3\pi$

따라서 $\cos\frac{\alpha+\beta}{4}=\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

정답 ②

025 삼각함수의 그래프

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

주어진 그래프를 보고 그래프에 맞는 삼각함수의 미정계수를 묻는 문제를 주기, 최대최소, 평행이동, 대칭 등 여러 가지를 복합적으로 묻는 문제로 변형하였다.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$y=a\cos\left(\frac{\pi}{2}-bx-c\right)=a\sin(bx+c)$

따라서 함수 $y=a\sin(bx+c)$의 최댓값과 최솟값이 각각 4, -4이고 $a>0$이므로 $a=4$

함수 $y=a\sin(bx+c)$의 주기가 $\frac{2\pi}{b}$이며

주어진 그래프에서 주기는 $\frac{11}{12}\pi-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$이므로 $b=2$

또한, 함수 $y=a\sin(bx+c)$의 그래프는 점 $(0, 2)$를 지나므로

$4\sin c=2$, $\sin c=\frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{2}<c<\frac{\pi}{2}$이므로 $c=\frac{\pi}{6}$

따라서 $abc=4\times2\times\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$

정답 ①

026 삼각함수의 활용

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

삼각방정식을 이용한 삼각함수의 연산과 덧셈정리를 묻는 문제를 삼각함수의 덧셈정리 중에서 사인함수의 덧셈정리를 묻는 문제로 변형하였다.

$\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos^2\frac{A}{2}$이므로 $\sin^2\frac{A}{2}+4\cos\frac{A}{2}=2$에서

$1-\cos^2\frac{A}{2}+4\cos\frac{A}{2}=2$, $\cos^2\frac{A}{2}-4\cos\frac{A}{2}+1=0$이므로

근의 공식을 이용하면

$\cos\frac{A}{2}=2\pm\sqrt{3}$

그런데 $\cos\frac{A}{2}\le 1$이므로 $\cos\frac{A}{2}=2-\sqrt{3}$

따라서

$$\sin\left(\frac{B+C-2\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi-A-2\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$$
$$=-\cos\frac{A}{2}=\sqrt{3}-2$$

정답 ③

027 삼각함수의 그래프

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

삼각함수와 로그함수의 합성함수의 최대, 최소를 묻는 문제를 삼각함수와 지수함수의 합성함수의 최대, 최소를 묻는 문제로 변형하였다.

$g(x)=3\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)-1$에서 $-3\le 3\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)\le 3$

$-4\le 3\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)-1\le 2$이므로 $-4\le g(x)\le 2$

함수 $(f\circ g)(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{g(x)}$에서 밑이 1보다 작으므로

$g(x)$의 값이 증가하면 $(f\circ g)(x)$의 값은 감소한다.

즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^2\le(f\circ g)(x)\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$이며, $\frac{1}{4}\le(f\circ g)(x)\le 16$

그러므로 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 최솟값은 $\frac{1}{4}$, 최댓값은 16

따라서 $4(M+m)=4\left(16+\frac{1}{4}\right)=65$

정답 65

028 삼각함수의 활용

이 문제의 변형 포인트! **문항의 확대, 축소 변형**

삼각부등식을 만족하는 미지수를 묻는 문제를 삼각함수의 덧셈정리 등을 이용해서 삼각부등식을 정리한 후 주어진 조건을 만족하는 미지수의 최대 또는 최소를 묻는 문제로 변형하였다.

$\sin^2 x+3\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+a-10\le 0$

$1-\cos^2 x+3\cos x+a-10\le 0$

$\cos^2 x-3\cos x-a+9\ge 0$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$에서

주어진 부등식 $t^2-3t-a+9\ge 0$에서

$f(t)=t^2-3t-a+9$로 놓으면

$f(t)=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-a+\frac{27}{4}\ (-1\le t\le 1)$

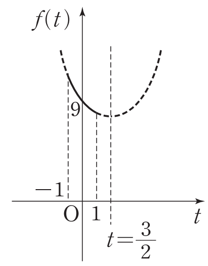
$y=f(t)$는 $t=1$일 때

최솟값 $f(1)=-a+7$을 갖는다.

따라서 주어진 부등식이 항상 성립하려면

$-a+7\ge 0$

따라서 $a\le 7$



정답 ④

029 삼각함수의 그래프

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

주어진 그래프에 맞는 삼각함수의 미정계수를 구한 후 삼각함수의 값을 묻는 문제를 그래프 대신에 삼각함수가 그려지는 기본 개념을 적용하여 미정계수를 묻는 문제로 변형하였다.

원의 반지름의 길이는 5 cm이고, 페달이 최저점을 지날 때, 지면으로 부터의 높이가 2 cm이므로

$y=a\sin b\left(x-\frac{1}{4}\right)+c$의 최댓값은 12, 최솟값은 2

$a+c=12$, $-a+c=2$이므로 $a=5$, $c=7$

또 페달이 한 바퀴 도는 데 1초가 걸리므로

$y=5\sin b\left(x-\frac{1}{4}\right)+7$의 주기는 1

따라서 $\frac{2\pi}{b}=1$이므로 $b=2\pi$

$a=5$, $b=2\pi$, $c=7$이고

따라서 $\frac{abc}{\pi}=\frac{70\pi}{\pi}=70$

정답 70

4 삼각함수의 미분

p. 24~28

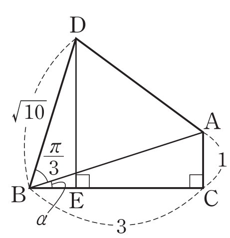
3점 예상	030 ④	031 4	032 24	033 ②	034 ①
	035 ③	036 ④	037 ①		
4점 예상	038 13	039 ③			

030 사인함수의 덧셈정리

이 문제의 변형 포인트! **문항의 확대, 축소 변형**

도형을 이용한 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 선분의 길이를 묻는 문제를 도형의 모양과 길이 등의 조건을 다르게 주어질 때 만족하는 선분의 길이를 묻는 문제로 변형하였다.

$\overline{AB}=\overline{DB}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로 $\angle ABC=\alpha$라 하면



$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

따라서 $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{DB}}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$

$$=\sqrt{10}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)$$
$$=\sqrt{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$
$$=\frac{3\sqrt{3}+1}{2}$$

정답 ④

031 탄젠트함수의 덧셈정리

이 문제의 변형 포인트!	문항의 확대, 축소 변형

직선의 기울기가 $\tan\theta$ 값임을 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 묻는 문제를 두 직선이 이루는 각과 두 직선 중 한 직선의 기울기를 주고 나머지 다른 직선의 기울기를 묻는 문제로 변형하였다.

직선 $y=x+2$, $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면 $\tan\alpha=1$, $\tan\beta=m$

이때 두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로

$\tan|\beta-\alpha|=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

또, $\tan|\beta-\alpha|=\left|\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\right|=\left|\frac{m-1}{1+m}\right|$

즉, $\left|\frac{m-1}{1+m}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\left(\frac{m-1}{1+m}\right)^2=\frac{1}{3}$

$3(m-1)^2=(m+1)^2$

따라서 $m^2-4m+1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 m의 값의 합은 4

정답 4

032 탄젠트함수의 덧셈정리

이 문제의 변형 포인트!	문항의 확대, 축소 변형

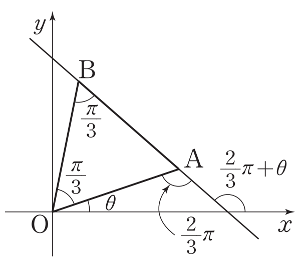
탄젠트함수의 덧셈정리를 이용하여 탄젠트의 함숫값을 묻는 문제를 직선을 활용한 탄젠트함수의 덧셈정리를 묻는 문제로 변형하였다.

직선 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=\frac{1}{5}$

직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\frac{2\pi}{3}+\theta$

직선 AB의 기울기는



$$\tan\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=\frac{\tan\frac{2\pi}{3}+\tan\theta}{1-\tan\frac{2\pi}{3}\tan\theta}=\frac{-\sqrt{3}+\frac{1}{5}}{1+\frac{\sqrt{3}}{5}}$$
$$=\frac{1-5\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}=\frac{(1-5\sqrt{3})(5-\sqrt{3})}{25-3}$$
$$=\frac{20-26\sqrt{3}}{22}=\frac{10-13\sqrt{3}}{11}$$

따라서 $a+b=11+13=24$

정답 24

033 삼각함수의 극한

이 문제의 변형 포인트!	문항의 확대, 축소 변형

삼각함수와 로그함수의 극한을 이용하여 함수의 연속을 묻는 문제를 지수함수, 로그함수, 삼각함수의 극한을 모두 이용하여 연속이 되는 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)$가 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=a$이 성립해야 한다.

$$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{1-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}x}\times\frac{x^2}{\sin^2 x}\times(1+\cos x)\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}x}\times\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\times\lim_{x\to0}(1+\cos x)$$
$$=1\times1\times1^2\times2=2$$

따라서 $a=2$

정답 ②

034 삼각함수의 극한

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

도함수의 정의를 변형한 삼각함수의 미분계수를 묻는 문제를 미분계수의 정의를 이용하여 삼각함수의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=x\sin x+\cos x$에서 $f(\pi)=\pi\sin\pi+\cos\pi=-1$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+5h)+1}{\sin h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(\pi+5h)-f(\pi)}{5h}\times\frac{5h}{\sin h}\right\}=5f'(\pi)$

한편, $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$이므로

$f'(\pi)=\pi\cos\pi=-\pi$

따라서 $5f'(\pi)=5\times(-\pi)=-5\pi$

정답 ①

035 삼각함수의 극한

이 문제의 변형 포인트!	문항의 확대, 축소 변형

삼각함수를 이용한 극한값을 묻는 문제를 극한의 조건을 변형하고 로그함수의 진수에 삼각함수를 사용해서 극한값을 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)=\ln(\sin x+\cos x)$

$$f'(x)=\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$$

$f''(x)$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)'(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$=\frac{-(\sin x+\cos x)^2-(\cos x-\sin x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{-2}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2$이고

$$\frac{1}{\sec^2 x-\tan x\sec x}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$$

$$=\frac{\cos^2 x(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{\cos^2 x(1+\sin x)}{(1-\sin^2 x)}$$

$=1+\sin x$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)+1}{f(x)(\sec^2 x-\tan x\sec x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)-f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}\times\frac{1}{(\sec^2 x-\tan x\sec x)}$$

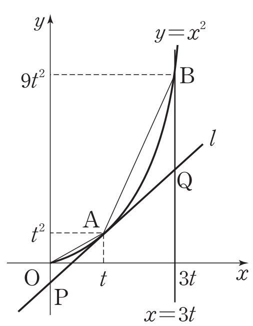
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{f'(x)-f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}}{\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}}\times(1+\sin x)=\frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}\times 2=4$$

정답 ③

036 탄젠트함수의 덧셈정리

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

곡선 밖의 점에서 곡선에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 일정하도록 하는 미지수를 묻는 문제를 곡선 위의 점에서의 접선들이 이루는 각과 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 도형의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.



점 A에서의 접선을 l이라고 하자. 접선 l이 x축과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=f'(t)=2t$($\because$ $f(x)=x^2$에서 $f'(x)=2x$)

직선 AO와 x축이 이루는 각의 크기를 α라 하면

$$\tan\alpha=\frac{t^2-0}{t-0}=t$$

직선 AB와 x축이 이루는 각의 크기를 β라 하면

$$\tan\beta=\frac{9t^2-t^2}{3t-t}=4t$$

$\angle\text{OAP}=\theta-\alpha$, $\angle\text{BAQ}=\beta-\theta$ 이고

조건에서 $\angle\text{OAP}=\angle\text{BAQ}$이므로

$\tan(\angle\text{OAP})=\tan(\angle\text{BAQ})$

즉, $\dfrac{\tan\theta-\tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha}=\dfrac{\tan\beta-\tan\theta}{1+\tan\beta\tan\theta}$이므로

$\dfrac{2t-t}{1+2t\times t}=\dfrac{4t-2t}{1+4t\times 2t}$, $t(1+8t^2)=2t(1+2t^2)$

$4t^2=1$, $t^2=\frac{1}{4}$, $t=\frac{1}{2}$($\because$ $t>0$)

점 $\text{A}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$가 되고 접선 l의 방정식은

$$y=1\times\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=x-\frac{1}{4}$$

y절편 P는 $\text{P}\left(0, -\frac{1}{4}\right)$이므로

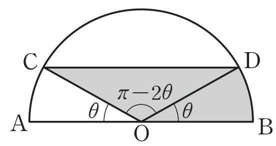
삼각형 OAP의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

정답 ④

037 삼각함수의 극한

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

조건을 만족하는 도형의 넓이를 식으로 나타내고 미분계수를 묻는 문제를 같은 도형에서 조건만 달리하여 그에 맞는 도형의 넓이를 식으로 나타내고 미분계수를 묻는 문제로 변형하였다.



$\angle\text{AOC}=\theta$이므로

$\angle\text{BOD}=\theta$ ($\because$ $\overline{\text{AB}}/\!/\overline{\text{CD}}$)이므로

$\angle\text{COD}=\pi-2\theta$

오른쪽 그림에서 도형 OBDC의 넓이

$S(\theta)$는

$S(\theta)=$(부채꼴 BOD의 넓이+삼각형 COD의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times 6^2\times\theta+\frac{1}{2}\times 6^2\times\sin(\pi-2\theta)=18(\theta+\sin 2\theta)$$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\tan\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{18(\theta+\sin 2\theta)}{\theta}\times\frac{\theta}{\tan\theta}\right\}$

$$=18\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(1+\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times 2\right)\times\frac{\theta}{\tan\theta}\right\}$$

$$=18(1+2)\times 1=54$$

정답 ①

038 삼각함수의 극한

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

조건을 만족하는 함수를 찾고 그 함수의 미분계수를 묻는 문제를 로그와 극한의 조건을 만족하는 함수를 찾고 그 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=4$에서 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)\ln\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)=4$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$ 일 때, $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)\ln\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0+}f\left(\frac{1}{t}\right)\ln\left\{(1+\sin 2t)^{\frac{1}{\sin 2t}}\right\}^{\sin 2t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}f\left(\frac{1}{t}\right)(\sin 2t)\ln\left\{(1+\sin 2t)^{\frac{1}{\sin 2t}}\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+} 2tf\left(\frac{1}{t}\right)\times\frac{\sin 2t}{2t}=2\lim_{t\to0+} tf\left(\frac{1}{t}\right)=4$$

$\lim_{t\to0+} tf\left(\frac{1}{t}\right)=2$이므로

$\lim_{t\to0+} tf\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$

$f(x)$의 다항식이 이차식 이상이면 발산하므로 수렴에 모순이 되고, 상수함수라면 0으로 수렴하므로 또한 모순이 된다.

최고차항의 계수비가 극한값이 되므로 일차항의 계수는 2가 되어야 한다. 다항함수 $f(x)=2x+a$로 놓을 수 있고

(나)의 조건에 의해서

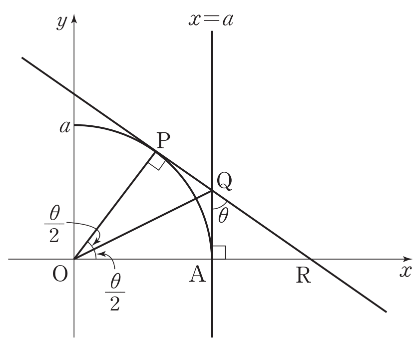
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2+x+1}=\lim_{x\to0}\frac{2x+a}{x^2+x+1}=a=3$이므로 상수항 $a=3$

따라서 $f(5)=13$ **정답 13**

039 삼각함수의 극한

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

원 위에서의 접선 및 다양한 상황들에 맞는 도형들의 넓이를 식으로 나타내고 극한값을 묻는 문제를 원 위의 임의의 점에서 접선 및 도형들에서의 극한값이 주어졌을 때 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.



$\overline{\mathrm{AQ}}=a\tan\frac{\theta}{2}$이고, $\overline{\mathrm{AR}}=a\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta$

삼각형 QAR의 넓이 $g(\theta)=\frac{1}{2}a^2\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta$

부채꼴 OPA의 넓이 $f(\theta)=\frac{1}{2}a^2\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}a^2\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\frac{1}{8}a^6\theta^3}$$

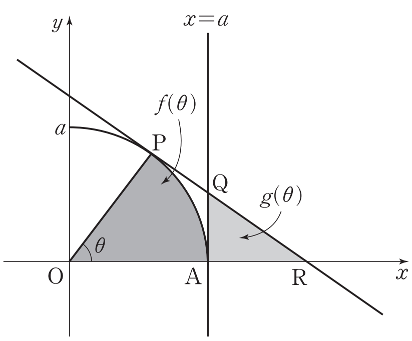
$$=\frac{8}{a^4}\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=81$$

따라서 $a^4=\frac{1}{81}$이므로 $a=\frac{1}{3}(\because a>0)$

다른 풀이

점 P의 좌표는 $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$이므로 원 $x^2+y^2=a^2$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$a\cos\theta\times x+a\sin\theta\times y=a^2$ …… ㉠



㉠에서 $x=a$일 때

$a^2\cos\theta+a\sin\theta\cdot y=a^2$에서

$y=\frac{a(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{a(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$

㉠에서 $y=0$일 때, $a\cos\theta\times x=a^2$에서 $x=\frac{a}{\cos\theta}$이므로

접선과 x축의 교점 R의 좌표는 $\mathrm{R}\left(\frac{a}{\cos\theta},\ 0\right)$

$\overline{\mathrm{AR}}=\frac{a}{\cos\theta}-a=a\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

따라서 삼각형 QAR의 넓이

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AR}}\times\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{a^2}{2}\times\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\times\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{a^2(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{a^2(1-\cos\theta)^2}{\sin2\theta}$$

부채꼴 OPA의 넓이 $f(\theta)=\frac{1}{2}a^2\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\left(\frac{1}{2}a^2\theta\right)^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{a^2(1-\cos\theta)^2}{\frac{1}{8}a^6\theta^3\sin2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{8}{a^4}\times\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{\theta^3\sin2\theta(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{8}{a^4}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^4\theta}{\theta^3\sin2\theta(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{8}{a^4}\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}\times\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\right\}$$

$$=\frac{8}{a^4}\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{a^4}=81$$

따라서 $a^4=\frac{1}{81}$이므로 $a=\frac{1}{3}(\because a>0)$ **정답 ③**

5 여러 가지 미분법

p. 29~31

3점 예상	040 ③	041 ③	042 ③	043 ②	044 ③
	045 ②	046 ⑤	047 ①	048 ②	049 ②
4점 예상	050 ③	051 ①			

040 함수의 몫의 미분법

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

함수의 몫의 미분법을 이용하여 미분계수를 묻는 문제를 지수함수와 로그함수가 각각 분자와 분모에 있는 함수의 미분계수의 정의를 이용한 미분계수를 묻는 문제로 변형하였다.

미분계수의 정의에 의하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}=3f'(1)$

$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)\times e^x}{e^{2x}}$이므로 $3f'(1)=\frac{3}{e}$ **정답 ③**

041 여러 가지 삼각함수의 도함수

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

여러 가지 삼각함수의 도함수를 이용하여 조건을 만족하는 값을 묻는 문제를 접선의 방정식을 찾고 두 선분의 길이 차를 묻는 문제로 변형하였다.

곡선 $y=\tan x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 $y'=\sec^2 x$

곡선 $y=\tan x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$에 접하는 직선의 기울기가 2일 때 접점의 x좌표를 a라 하면

$\sec^2 a=1+\tan^2 a=2$이므로 $\tan a=1$ 또는 $\tan a=-1$

$0<a<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan a=1$이고 $a=\frac{\pi}{4}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

기울기가 2이고 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=2x-\frac{\pi}{2}+1$이므로 이 직선이 x축, y축과 만나는 점은 각각

$\mathrm{A}\left(\frac{\pi-2}{4}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{-\pi+2}{2}\right)$이다.

즉, $\overline{\mathrm{OA}}=\frac{\pi-2}{4}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\frac{\pi-2}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OA}}=\frac{\pi-2}{4}$

정답 ③

042 로그함수의 도함수

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

로그함수의 도함수를 묻는 문제를 양변에 자연로그를 취해서 미분계수를 묻는 문제로 변형하였다.

주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln f(x)=(2x+1)\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{f'(x)}{f(x)}=2\ln x+(2x+1)\times\frac{1}{x}$

따라서 $f'(x)=f(x)\left(2\ln x+\frac{2x+1}{x}\right)$이고

$f'(1)=3f(1)=3$

정답 ③

043 지수함수의 도함수

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

지수함수의 도함수를 묻는 문제를 지수와 삼각함수의 합성함수의 미분계수를 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(2x-1)=2^{\cos\frac{\pi}{2}x}-3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(2x-1)=2^{\cos\frac{\pi}{2}x}\times\ln 2\times\left(-\sin\frac{\pi}{2}x\right)\times\frac{\pi}{2}$

양변에 $x=1$을 대입하면 $2f'(1)=1\times\ln 2\times(-1)\times\frac{\pi}{2}$

$f'(1)=-\frac{\pi\ln 2}{4}$

따라서 $k=-\frac{\pi}{4}$

정답 ②

044 합성함수의 미분법

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

미분가능한 함수가 주어져있고 미분계수의 정의를 이용해서 식의 값을 묻는 문제를 로그와 삼각함수의 합성함수의 미분계수를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=\ln(1-\cos^2 x)$에서

$f'(x)=\frac{-2\cos x(-\sin x)}{1-\cos^2 x}=\frac{2\cos x\sin x}{\sin^2 x}=2\cot x$

따라서 $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)f'\left(\frac{3}{8}\pi\right)=2\cot\frac{\pi}{8}\times2\cot\frac{3}{8}\pi$

$=4\cot\frac{\pi}{8}\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

$=4\cot\frac{\pi}{8}\tan\frac{\pi}{8}=4$

정답 ③

045 함수의 몫의 미분법

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

함수의 몫의 미분법을 이용하여 미분계수를 묻는 문제를 함수를 치환해서 분수꼴로 표현한 후 몫의 미분법을 이용하여 미분계수를 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $p(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$라 하면 $p(0)=1$

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(h)}{g(h)}-1\right\}=\lim_{h\to0}\frac{p(h)-p(0)}{h}=p'(0)$

$p'(x)=\left(\frac{e^x}{2x+1}\right)'=\frac{(2x-1)e^x}{(2x+1)^2}$

따라서 $p'(0)=-1$

정답 ②

046 합성함수의 미분법

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

조건을 만족하는 미분가능한 함수의 합성함수의 미분계수를 묻는 문제를 초월함수들의 합성함수의 미분계수를 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $(f\circ g^{-1})(x)$의 $x=5$에서의 미분계수는

$f'(g^{-1}(5))\times(g^{-1})'(5)$이므로 $g^{-1}(5)=0$이고

$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x$이므로 $f'(g^{-1}(5))=f'(0)=1$

또한, 함수 $g^{-1}(x)$는 $g(x)$의 역함수이므로 모든 실수 x에 대하여

$g^{-1}(g(x))=x$를 만족하고 양변을 x에 대하여 미분하면

$(g^{-1})'(g(x))g'(x)=1$이고 $g(0)=5$이므로

$(g^{-1})'(5)=\frac{1}{g'(0)}$, $g'(0)=2$이므로 $(g^{-1})'(5)=\frac{1}{2}$

그러므로 $f'(g^{-1}(5))\times(g^{-1})'(5)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

정답 ⑤

047 함수의 몫의 미분법

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

함수의 몫의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 묻는 문제를 로그함수의 도함수, 몫의 미분법, 이계도함수를 이용한 함수의 접선의 기울기를 묻는 문제로 변형하였다.

$$f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

또한, $f'(x)=(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$$f''(x)=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\times 2x=-x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$g(x)=\frac{f''(x)}{f'(x)}=-\frac{x}{x^2+1}$$

$$g'(x)=-\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

따라서 $g(2)=\frac{3}{25}$이고

$p+q=25+3=28$

정답 ①

048 이계도함수

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

지수함수의 이계도함수를 묻는 문제를 지수함수 또는 삼각함수의 이계도함수가 가지는 성질을 이용해서 무한등비급수를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(2x-1)=3\cos(3x+4)$를 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(2x-1)=-9\sin(3x+4)$

이 식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$4f''(2x-1)=-27\cos(3x+4)=-9(3\cos(3x+4))=-9f(2x-1)$

$f(2x-1)=-\frac{4}{9}f''(2x-1)$, $f(x)=-\frac{4}{9}f_2(x)$이므로 $a_1=-\frac{4}{9}$

마찬가지로 $f_2(x)=-\frac{4}{9}f_4(x)$이므로 $f(x)=\left(-\frac{4}{9}\right)^2 f_4(x)$이고,

$a_2=\left(-\frac{4}{9}\right)^2$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 초항이 $-\frac{4}{9}$이고 공비가 $-\frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{\left(-\frac{4}{9}\right)}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=-\frac{4}{13}$$

정답 ②

049 역함수의 미분법

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

역함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 묻는 문제를 삼각함수의 역함수의 접선의 기울기를 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)=\tan\frac{x}{4}$와 함수 $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 모든 실수 x에 대하여 $g\left(\tan\frac{x}{4}\right)=x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $g'\left(\tan\frac{x}{4}\right)\times\sec^2\frac{x}{4}\times\frac{1}{4}=1$이므로

$$g'\left(\tan\frac{x}{4}\right)=\frac{4}{\sec^2\frac{x}{4}}=\frac{4}{1+\tan^2\frac{x}{4}}$$

그러므로 $g'(x)=\frac{4}{1+x^2}$

$$g'(1)=\frac{4}{1+1^2}=2$$

정답 ②

050 역함수의 미분법

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

역함수의 성질을 이용해서 역함수의 도함수를 묻는 문제를 대칭함수의 성질을 이용하여 역함수의 도함수를 묻는 문제로 변형하였다.

조건 (나)에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=2$의 극한값이 존재하고 $x\to1$일 때,

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

따라서 $f(1)=2$이고 미분계수의 정의에 의하여 $f'(1)=2$

마찬가지로 $\lim_{x\to-3}\frac{g(x)+2}{x+3}=\frac{1}{2}$의 극한값이 존재하고 $x\to-3$일 때,

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

따라서 $g(-3)=-2$이고 미분계수의 정의에 의하여 $g'(-3)=\frac{1}{2}$

조건 (가)에서 $f(x)$가 원점 대칭함수이므로 그 역함수인 $g(x)$도 원점 대칭함수이고 그 도함수 $g'(x)$는 y축 대칭함수임을 알 수 있다.

$(\because g(-f(x))=g(f(-x))=-x=-g(f(x)))$

따라서 $g(3)=2$, $g'(3)=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{g(g(x))-1}{x-3}&=\lim_{x\to3}\frac{g(g(x))-g(g(3))}{x-3}\\&=\{g(g(x))\}'(3)\\&=g'(g(3))\times g'(3)=g'(2)\times g'(3)\\&=\frac{1}{f'(1)}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

정답 ③

051 역함수의 미분법

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

역함수의 성질을 이용하여 역함수의 도함수를 묻는 문제를 함수와 역함수의 교점에서 미분계수가 갖는 성질 및 $f(ax+b)$꼴의 역함수를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(3x-2)=h(x)$라 하면 $\lim_{x\to1}\frac{h(x)-g(x)}{x-1}=\frac{8}{3}$에서

$x\to1$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

그러므로 $h(1)=g(1)=1(\because h^{-1}(x)=g(x))$

$h(1)=f(1)=1$이므로 $a+b=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{h(x)-g(x)}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)-\{g(x)-g(1)\}}{x-1}\\&=h'(1)-g'(1)=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

$h'(1)=k$라고 하면 $g'(1)=\frac{1}{k}$이므로 $k-\frac{1}{k}=\frac{8}{3}$,

$k=-\frac{1}{3}$ 또는 $k=3$

함수 $h(x)$는 최고차항이 양수인 삼차함수이고 역함수가 존재하려면

$f'(x)\ge0$을 만족하므로 $k=3$

$h'(x)=3f'(3x-2)$, $f'(x)=3x^2+2ax+3$

따라서 $h'(1)=3f'(1)=3(3+2a+3)=3$, $a=-\frac{5}{2}$

㉠에서 $b=-\frac{1}{2}$

따라서 $a-b=-2$

정답 ①

6 도함수의 활용

p. 32~35

3점 예상	052 ③	053 ②	054 ①	055 ④	056 ⑤
	057 ②	058 ③	059 ③		
4점 예상	060 ③	061 17	062 ①		

052 접선의 방정식

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

곡선 위에 있지 않은 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이를 묻는 문제를 지수함수와 로그함수의 대칭성을 이용하여 접점의 좌표를 구하여 도형의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.

원점 O에서 곡선 $y=\ln\frac{x}{2}+1$에 그은 접선의 접점 A의 좌표를 $\left(t,\ \ln\frac{t}{2}+1\right)$이라 하면, $y'=\frac{1}{x}$이므로 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$이다.

접선의 방정식을 구하면 $y-\ln\frac{t}{2}-1=\frac{1}{t}(x-t)$이다. 이 식에 원점 O$(0,\ 0)$를 대입하여 정리하면

$-\ln\frac{t}{2}-1=-1$, $\ln\frac{t}{2}=0$, $\frac{t}{2}=1$, $t=2$, 따라서 A$(2,\ 1)$

곡선 $y=2e^{x-1}$은 곡선 $y=\ln\frac{x}{2}+1$과 역함수 관계이므로 $y=x$에 대칭이다. 따라서 B$(1,\ 2)$이다.

또한, 두 점 A$(2,\ 1)$, B$(1,\ 2)$의 중점 M$\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이라 하면

두 선분 OM과 AB는 수직이다. 따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}=\frac{3}{2}$

정답 ③

053 함수의 증가와 감소

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

미분가능한 함수의 증가와 감소 판정을 묻는 문제를 이차방정식의 판별식을 이용하여 모든 실수에 대하여 증가하도록 하는 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=(x^2+kx+k)e^x$에서

$f'(x)=(2x+k)e^x+(x^2+kx+k)e^x=\{x^2+(k+2)x+2k\}e^x$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 증가하는 조건은

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다. 그리고 $e^x>0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $x^2+(k+2)x+2k\geq 0$을 만족해야 한다.

즉, 판별식 $D=(k+2)^2-8k=k^2-4k+4=(k-2)^2\leq 0$

따라서 $k=2$

정답 ②

054 곡선의 변곡점

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

이계도함수가 존재하는 함수에서 곡선의 변곡점을 이용하여 미지수를 묻는 문제를 초월함수가 서로 다른 두 개의 변곡점을 갖도록 미지수의 범위를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-k\ln x\ (x>0)$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{k}{x}$, $f''(x)=x-1+\frac{k}{x^2}=\frac{x^3-x^2+k}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 삼차방정식 $x^3-x^2+k=0$이 하나의 음의 실근과 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

함수 $y=x^3-x^2+k$에서 $y'=3x^2-2x=0$, $x=0$, $x=\frac{2}{3}$이므로

함수 $y=x^3-x^2+k$는 $x=0$에서 극댓값 k, $x=\frac{2}{3}$에서 극솟값

$k-\frac{4}{27}$를 갖는다.

그러므로

$k>0$이고, $k-\frac{4}{27}<0$

따라서 $0<k<\frac{4}{27}$이므로

$a+b=0+\frac{4}{27}=\frac{4}{27}$

정답 ①

055 함수의 최대와 최소

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

초월함수에서 조건을 만족하는 도형의 넓이의 최댓값을 묻는 문제를 비슷한 유형으로 최댓값과 최댓값을 가질 때 미지수의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

점 B, C, D의 좌표는 B $(-t,\ \ln t^2)$, C $(t,\ 0)$, D $(-t,\ 0)$이므로

직사각형 ABDC의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=2t\times(-\ln t^2)=-4t\ln t$, $S'(t)=-4(\ln t+1)$

$S'(t)=0$에서 $\ln t+1=0$, 즉 $t=\frac{1}{e}$

구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

함수 $S(t)$는 $t=\frac{1}{e}$에서 극대이면서 최대이므로 함수 $S(t)$의 최댓값은

$S\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{4}{e}$

따라서 $k=\frac{1}{e}$, $M=\frac{4}{e}$이므로 $\frac{M}{k}=4$

정답 ④

056 접선의 방정식

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

미분가능한 함수 위의 점에서의 접선의 방정식을 묻는 문제를 미지수가 포함된 로그함수에서의 접선의 방정식을 묻는 문제로 변형되었다.

점 $(-e,\ 1)$이 곡선 $y=\ln(x+a)$ 위의 점이므로

$1=\ln(-e+a)$, $e=-e+a$

$a=2e$

따라서 $y=\ln(x+2e)$이므로

$y'=\dfrac{1}{x+2e}$

곡선 위의 점 $(-e,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{1}{-e+2e}=\dfrac{1}{e}$이므로 접선의 방정식은

$y-1=\dfrac{1}{e}(x+e)$, $y=\dfrac{1}{e}x+2$

따라서 $m=\dfrac{1}{e}$, $n=2$이므로

$\dfrac{n}{m}=2e$

정답 ⑤

057 곡선의 변곡점

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

이계도함수를 이용한 변곡점을 묻는 문제를 이계도함수를 이용하여 두 변곡점 사이의 거리를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2x\times(x^2+3)-x^2\times 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{6x}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=\dfrac{6\times(x^2+3)^2-6x\times 2(x^2+3)\times 2x}{(x^2+3)^4}$

$=\dfrac{18-18x^2}{(x^2+3)^3}=\dfrac{-18(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x=-1$과 $x=1$의 좌우에서 각각 $f''(x)$의 부호가 바뀌고,

$f(-1)=\dfrac{1}{4}$, $f(1)=\dfrac{1}{4}$이므로

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $\left(-1,\ \dfrac{1}{4}\right)$, $\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$

따라서 두 변곡점 사이의 거리는 2

정답 ②

058 미분과 부등식의 활용

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

주어진 범위에서 미분을 이용하여 곡선의 최솟값과 또 다른 상수함수의 위치를 비교함으로써 조건을 만족하는 미지수의 값을 묻는 문제를 절대부등식을 만족하는 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=2e^x-x^2-2x$라 하면

$x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq k$가 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하면 된다.

$f'(x)=2e^x-2x-2$, $f''(x)=2e^x-2$

$x\geq 0$이므로 $f''(x)\geq 0$

따라서 $f'(x)$는 증가함수이고 $f'(0)=0$이므로

$f'(x)\geq 0(\because x\geq 0)$

따라서 $f(x)$도 증가함수이다.

그러므로 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=2$

따라서 $k\leq 2$이며 최댓값은 2

정답 ③

059 곡선의 변곡점과 접선

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

도함수를 이용한 극값과 이계도함수를 이용한 변곡점을 묻는 문제를 지수함수의 변곡점과 그 점에서 접선의 기울기를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=2e^{\sqrt{x}}$로 놓으면

$f'(x)=2e^{\sqrt{x}}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

$f''(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{2x\sqrt{x}}$

$f''(x)=0$에서 $\sqrt{x}-1=0$, 즉 $x=1$

$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌고, $f(1)=2e$이므로

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(1,\ 2e)$이다.

그리고 $f'(1)=\dfrac{e^{\sqrt{1}}}{\sqrt{1}}=e$이므로 변곡점에서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 e

따라서 $a+\dfrac{b}{c}=1+\dfrac{2e}{e}=3$

정답 ③

060 방정식에의 활용

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

도함수를 이용하여 함수의 그래프 개형을 파악하여 방정식의 실근의 개수를 묻는 문제를 방정식이 오직 하나의 실근을 가지도록 하는 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

$xe^{-\frac{1}{2}x^2}-t=0$에서 $xe^{-\frac{1}{2}x^2}=t$

$f(x)=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}+xe^{-\frac{1}{2}x^2}(-x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}(1-x^2)$

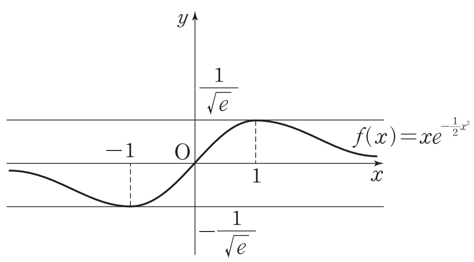
$f'(x)=0$에서 $e^{-\frac{1}{2}x^2}>0$이므로 $1-x^2=0$, 즉 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$을 갖고, $x=1$에서 극댓값 $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$을 갖는다.

$f(0)=0$, $f(-x)=-f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $xe^{-\frac{1}{2}x^2}-t=0$이 오직 하나의 실근을 가지는 것은 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점이 오직 하나인 것과 같다.

그러므로 세 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{e}}$, $y=0$, $y=-\frac{1}{\sqrt{e}}$이 함수 $f(x)$의 그래프와 만나는 교점이 오직 하나이다.

따라서 실수 t의 개수는 3개

정답 ③

061 방정식에의 활용

이 문제의 변형 포인트! 문항의 축소, 확대 변형

도함수를 이용하여 함수의 그래프 개형을 파악하여 방정식의 실근의 개수를 묻는 문제를 방정식의 실근의 개수를 수열로 표현하여 수열의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

방정식 $nx^2=e^{nx-2}$에서 $nx^2e^{-nx+2}=1$

$f(x)=nx^2e^{-nx+2}$으로 놓으면

$f'(x)=2nxe^{-nx+2}+nx^2e^{-nx+2}(-n)=nx(2-nx)e^{-nx+2}$

$f'(x)=0$에서 $e^{-nx+2}>0$이므로 $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{n}$

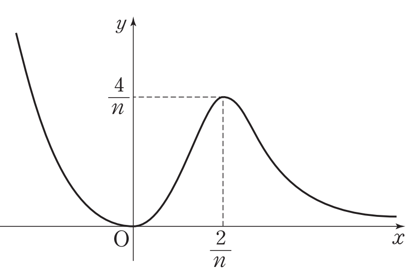
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{n}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=0$을 갖고, $x=\frac{2}{n}$에서 극댓값

$f\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{4}{n}$를 갖는다.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $nx^2e^{-nx+2}=1$의 실근의 개수 a_n은 함수 $y=nx^2e^{-nx+2}$와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같다. 따라서

(i) $1<\frac{4}{n}$, $n<4$ 즉 $n=1, 2, 3$일 때, $a_n=3$

(ii) $1=\frac{4}{n}$, $n=4$ 일 때, $a_n=2$

(iii) $1>\frac{4}{n}$, $n>4$ 즉 $n=5, 6, \cdots, 10$일 때, $a_n=1$

따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_n=3\times3+2+1\times6=17$

정답 17

062 함수의 최대와 최소

이 문제의 변형 포인트! 자료 상황의 활용

도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구하고 접선과 좌표축으로 만들어지는 도형의 넓이의 최댓값을 묻는 문제를 곡선 밖의 점에서 서로 다른 두 곡선에 그은 접선 위의 임의의 점 사이의 거리의 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.

원점에서 곡선 $y=\frac{4e\ln x}{x}$에 그은 접선의 접점 A를 $\mathrm{A}\left(t, \frac{4e\ln t}{t}\right)$이라 하면,

$y'=\frac{4e(1-\ln x)}{x^2}$, 접선의 기울기는 $\frac{4e(1-\ln t)}{t^2}$이므로

접선의 방정식은 $y-\frac{4e\ln t}{t}=\frac{4e(1-\ln t)}{t^2}(x-t)$

이 접선이 원점을 지나므로

$-\frac{4e\ln t}{t}=\frac{4e(1-\ln t)}{t^2}(-t)$, $2\ln t=1$, $t=\sqrt{e}$

따라서 접선의 방정식을 정리하면 $2x-y=0$

한편, $y=(x+1)e^x$ 위의 임의의 점 Q의 좌표를 $\mathrm{Q}(s, (s+1)e^s)$라 하고,

$y'=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$이므로

그 점에서 접선의 기울기는 $(s+2)e^s$

직선 $2x-y=0$ 위의 임의의 점 P와 곡선 $y=(x+1)e^x$ 위의 임의의 점 Q 사이의 거리가 최소가 되려면 직선 $2x-y=0$의 기울기와 곡선 $y=(x+1)e^x$ 위의 점에서의 접선의 기울기가 같아야 한다.

즉 $(s+2)e^s=2$

그러므로 $s=0$

점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(0, 1)$이다.

따라서 선분 PQ의 최솟값은 $\mathrm{Q}(0, 1)$에서 직선 $2x-y=0$에 이르는 거리와 같으며,

그 값은 $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

정답 ①

7 여러 가지 적분법

p. 36~39

3점 예상	063 ②	064 ④	065 ②	066 ③	067 ②
	068 ③	069 ②			
4점 예상	070 ③	071 ①	072 ⑤	073 ①	

063 여러 가지 함수의 적분

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

함수를 전개해서 정적분 값을 묻는 문제를 접선의 기울기와 지나는 한 점을 이용해서 적분을 이용해서 함수를 찾고 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$f'(x)=\tan^2 x+1=\sec^2 x$이므로

$f(x)=\int(\tan^2 x+1)dx=\int\sec^2 x\,dx=\tan x+C$

이 곡선이 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$을 지나므로 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$

따라서 $C=2$

그러므로 $f(x)=\tan x+2$이고 $f(0)=2$

정답 ②

064 치환적분법

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

로그함수의 치환을 이용한 정적분 값을 묻는 문제를 식을 변형해서 치환적분 한 후에 조건을 이용해서 부정적분 상수를 구하고 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$(x^2+1)^2f'(x)=2x\ln(x^2+1)$에서 $f'(x)=\frac{2x\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$

$\ln(x^2+1)=t$로 치환하면 $\frac{dt}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}$, $x^2+1=e^t$이므로

$\int\frac{2x\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{t}{e^t}dt$

부분적분법에 따라

$\int\frac{t}{e^t}dt=-te^{-t}+\int e^{-t}dt=-te^{-t}-e^{-t}+C$

$=(-t-1)e^{-t}+C$

따라서 $f(x)=(-\ln(x^2+1)-1)\,e^{-\ln(x^2+1)}+C$

$=\frac{-\ln(x^2+1)-1}{x^2+1}+C$

$f(0)=1$이므로 $C=2$

$f(1)=-\frac{\ln 2}{2}+\frac{3}{2}$이므로 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

따라서 $a+b=1$

정답 ④

065 정적분으로 표시된 함수의 미분과 극한

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

정적분으로 표시된 함수를 미분해서 미지수와 함숫값을 묻는 문제를 정적분 해야 하는 함수에 적분변수와 미지수 x가 있는 경우 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\int_e^x(x-t)f(t)dt=x\int_e^x f(t)dt-\int_e^x tf(t)dt=\ln x+kx$

양변에 $x=e$을 대입하면

$0=1+ek$, $k=-\frac{1}{e}$

$x\int_e^x f(t)dt-\int_e^x tf(t)dt=\ln x-\frac{1}{e}x$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_e^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_e^x f(t)dt=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$ …… ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-\frac{1}{x^2}$

따라서 $kf(2)=\left(-\frac{1}{e}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4e}$

정답 ②

066 정적분으로 표시된 함수의 극한

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

정적분으로 표시된 함수의 극한값을 묻는 문제를 정적분으로 표시된 절댓값이 들어있는 함수의 극한값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\int e^t|t-3|dt=F(t)+C$라고 하면 $F'(t)=e^t|t-3|$

$\frac{1}{n}=h$로 치환하면 $n\to\infty$일 때, $h\to 0+$이므로

$\lim_{n\to\infty}n\int_{2-\frac{1}{n}}^{2+\frac{3}{n}}e^t|t-3|dt$

$=\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+3h}e^t|t-3|dt$

$=\lim_{h\to0+}\frac{F(2+3h)-F(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\left\{\frac{F(2+3h)-F(2)}{h}-\frac{F(2-h)-F(2)}{h}\right\}$

$=3F'(2)+F'(2)=4e^2$

정답 ③

067 정적분과 급수

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

급수의 극한값을 정적분을 이용해서 구할 수 있는지를 묻는 문제를 주어진 식을 먼저 급수로 바꾸고 다시 정적분으로 바꾼 후 극한값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\ln\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}{n^n}$

$=\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n}+\ln\frac{n+3}{n}+\cdots+\ln\frac{n+n}{n}$

$=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}{n^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_1^2\ln x\,dx=\Big[x\ln x-x\Big]_1^2$

$=(2\ln 2-2)-(0-1)=2\ln 2-1$

정답 ②

068 부분적분법

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

부분적분을 이용하여 함수를 찾고, 그 함수와 다른 함수와의 교점의 x좌표들의 곱을 묻는 문제를 삼각함수가 들어있는 부분적분을 이용하여 함수를 찾고 다른 초월함수와 교점의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

$f'(x)=x^2\cos x$에서 $f(x)=\int x^2\cos x dx$

$u(x)=x^2$, $v'(x)=\cos x$으로 놓으면 $u'(x)=2x$, $v(x)=\sin x$이므로

$f(x)=x^2\sin x-2\int x\sin x dx$

다시 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$f(x)=x^2\sin x-2\left(-x\cos x+\int\cos x dx\right)$$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-2+C=\frac{\pi^2}{4}-2$, $C=0$

$y=f(x)$와 곡선 $y=2x\cos x$가 만나는 모든 점의 x좌표는

$x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x=2x\cos x$의 실근이다.

$x^2\sin x-2\sin x=0$,

$-\pi<x<\pi$에서 $\sin x=0$ 또는 $x^2-2=0$이다

그러므로 만나는 점의 x좌표는 $x=0$, $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$

즉 3개

정답 ③

069 치환적분법

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

함수의 그래프의 개형과 치환적분법을 이용해서 정적분 값을 묻는 문제를 절댓값이 들어있는 함수의 정적분으로 변형하여 범위에 따라 함수를 나눈 후 치환적분법을 이용해서 정적분 값을 묻는 문제로 변형하였다.

(i) $0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $f'(x)\ge0$, $f(x)\ge0$,

$F(x)=\int_0^x e^{f(t)}dt$, $F'(x)=e^{f(x)}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)e^{f(x)}dx$에서 $f(x)=t$로 치환하면 $x=0$일 때 $t=0$,

$x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이고 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)e^{f(x)}dx=\int_0^1 e^t dt=e-1$

(ii) $\frac{\pi}{2}\le x<\pi$에서 $f'(x)\le0$, $f(x)\ge0$,

$F(x)=\int_0^x e^{f(t)}dt$, $F'(x)=e^{f(x)}$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -f'(x)e^{f(x)}dx$에서 $f(x)=t$로 치환하면

$x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$, $x=\pi$일 때 $t=0$이고 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -f'(x)e^{f(x)}dx=\int_0^1 e^t dt=e-1$

(iii) $\pi\le x\le\frac{3\pi}{2}$에서 $f'(x)\le0$, $f(x)\le0$,

$F(x)=\int_0^{\pi} e^{f(t)}dt+\int_{\pi}^x e^{-f(t)}dt$, $F'(x)=e^{-f(x)}$

$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -f'(x)e^{-f(x)}dx$에서 $f(x)=t$로 치환하면

$x=\pi$일 때 $t=0$, $x=\frac{3\pi}{2}$일 때 $t=-1$이고 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -f'(x)e^{-f(x)}dx=\int_{-1}^0 e^{-t}dt=e-1$

따라서

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |f'(x)|F'(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)e^{f(x)}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -f'(x)e^{f(x)}dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -f'(x)e^{-f(x)}dx$$

$$=e-1+e-1+e-1=3e-3$$

정답 ②

070 정적분으로 표시된 함수의 미분

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

정적분으로 표현된 함수 위의 점에서의 접선의 방정식을 묻는 문제를 무한등비급수의 정적분으로 표시된 함수 위의 점에서의 접선의 기울기와 함숫값을 묻는 문제로 변형하였다.

$$f'(x)=1+\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\cos^{n-1}x=\frac{1}{1-\cos x}$$

이므로 $a=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$$f'(x)=\frac{1}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}=\csc^2 x+\csc x\cot x$$

$$f(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^x (1+\cos t+\cos^2 t+\cos^3 t+\cdots)dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^x (\csc^2 t+\csc t\cot t)dt$$

$$=\Big[-\cot t-\csc t\Big]_{\frac{\pi}{4}}^x=-\cot x-\csc x+1+\sqrt{2}$$

이므로 $b=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}$

$a+b^2=1+(\sqrt{2})^2=3$

정답 ③

071 정적분으로 표시된 함수의 미분

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

정적분으로 표현된 함수의 곱미분을 이용한 함숫값을 묻는 문제를 대칭의 성질을 갖는 함수의 정적분으로 표현된 함수의 부분적분을 이용하여 정적분 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f(x)$이고

양변에 $x=0$를 대입하면 $g(0)=0$

함수 $f(x)$가 $f(x)=f(-x)$를 만족하는 y축 대칭함수이므로

$g(x)=\int f(x)dx=\int f(-x)dx=-g(-x)+C$에서

$g(0)=0$이므로 $C=0$

즉 $g(x)=-g(-x)$이므로 함수 $g(x)$는 원점 대칭함수이다.

또한, $\cos x$는 y축 대칭함수이므로 $g(x)\cos x$는 원점 대칭함수이다.

($\because$ 함수 $f(x)$를 원점 대칭함수, 함수 $g(x)$를 y축 대칭함수, 함수 $h(x)=f(x)g(x)$라고 하면

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$)

따라서 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x)\cos x dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x)\cos x dx$

$\left(\because \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\cos x dx=0\right)$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x)\cos x\,dx=\Big[g(x)\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\sin x\,dx$$
$$=0-g\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$$

정답 ①

072 정적분으로 표시된 함수의 미분

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

절대부등식을 만족하는 미지수의 최댓값을 함수로 하는 정적분의 미지수를 묻는 문제를 역함수가 포함된 정적분으로 나타낸 함수들의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$\int_{1}^{g(x)} f(t)dt=2\ln x$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(g(x))g'(x)=\frac{2}{x}$

($\because$ $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$\frac{d}{dx}(F(g(x))-F(1))=f(g(x))g'(x)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 $f(g(x))=x$에서

$g'(x)=\frac{2}{x^2}$

따라서 $g(x)=\int\frac{2}{x^2}dx=-\frac{2}{x}+C$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_{1}^{g(1)} f(t)dt=2\ln 1=0$이므로 $g(1)=1$

$g(1)=-2+C=1$, $C=3$

$n=1$일 때, $\int_{1}^{2}(|g(x)-1|+1)dx=\int_{1}^{2}\left(-\frac{2}{x}+3\right)dx$

$n=2$일 때, $\int_{1}^{2}(|g(x)-2|+2)dx=\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}+1\right)dx$

$n=3$일 때, $\int_{1}^{2}(|g(x)-3|+3)dx=\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}+3\right)dx$

$$\sum_{n=1}^{3}\left\{\int_{1}^{2}(|g(x)-n|+n)dx\right\}$$
$$=\int_{1}^{2}\left(-\frac{2}{x}+3\right)dx+\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}+1\right)dx+\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}+3\right)dx$$
$$=\int_{1}^{2}\left(7+\frac{2}{x}\right)dx=\Big[7x+2\ln x\Big]_{1}^{2}=7+2\ln 2$$

따라서 $a+b=7+2=9$

정답 ⑤

073 정적분과 급수

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

주어진 도형에서 조건을 만족하는 넓이를 급수로 표현하고 이를 정적분으로 바꾸어 정적분 값을 묻는 문제를 함수에서 접선의 방정식이 x축과 만나는 점의 거리를 이용하여 급수를 정적분으로 바꾸어 정적분 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\mathrm{A}_k=(x_k, \ln x_k)$이므로 점 A_k에서 그은 접선의 방정식은

$y-\ln x_k=\frac{1}{x_k}(x-x_k)$이다. 그러므로

$\mathrm{B}_k=(x_k-x_k\ln x_k, 0)$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{OB}_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_k\ln x_k|$이고 $x_k=2+\frac{2k}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_k\ln x_k|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\left(2+\frac{2k}{n}\right)-\left(2+\frac{2k}{n}\right)\ln\left(2+\frac{2k}{n}\right)\right|$$
$$=\int_{2}^{4}|x-x\ln x|dx$$

$x<e$일 때 $x-x\ln x>0$이고, $x\geq e$일 때, $x-x\ln x\leq 0$이므로

$$\int_{2}^{4}|x-x\ln x|dx=\int_{2}^{e}(x-x\ln x)dx+\int_{e}^{4}(x\ln x-x)dx$$

$\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$이므로

$$\int_{2}^{4}|x-x\ln x|dx$$
$$=-\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_{2}^{e}+\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_{e}^{4}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{2}^{e}-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{e}^{4}$$
$$=\frac{1}{2}e^2+18\ln 2-15$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=18$, $c=-15$이고, $8a+b+c=7$

정답 ①

8 정적분의 활용

p. 40~43

3점 예상	074 ④	075 ②	076 ④	077 ③	078 ②
	079 ①	080 ⑤	081 ③		
4점 예상	082 ②	083 ④	084 ①		

074 넓이가 같을 조건

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

무리함수와 직선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같아지는 미지수의 값을 묻는 문제를 로그함수와 직선과 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 같을 때 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

그림에서 $y=\ln x$, $y=ax+b$ 및 x축으로 둘러싸인 부분을 C라 하고 A, B, C의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자.

이때 A와 B의 넓이가 같으므로 $S_1+S_3=S_2+S_3$이다.

(i) $S_1+S_3=\int_{0}^{e}(ax+b)dx$

$=\left[\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_{0}^{e}=\frac{1}{2}ae^2+be$

(ii) $S_2+S_3=\int_{1}^{e}\ln x\,dx$

$=\Big[x\ln x\Big]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}1dx$

$=e-\Big[x\Big]_{1}^{e}$

$=e-(e-1)=1$

(i), (ii)에 의해 $\frac{1}{2}ae^2+be=1$ …… ㉠

한편 $y=ax+b$가 $(e, 0)$을 지나므로 $ae+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{2}{e^2}$, $b=\frac{2}{e}$

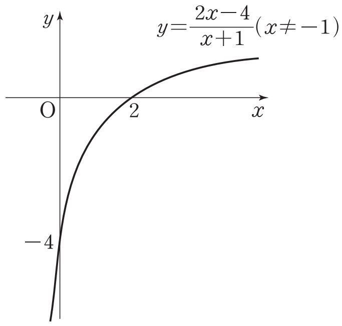
따라서 $ab=-\frac{4}{e^3}$

정답 ④

075 곡선과 좌표축 사이의 넓이

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

삼각함수에서 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 묻는 문제를 유리함수와 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.



구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^2\left|\frac{2x-4}{x+1}\right|dx=\int_0^2\left(\frac{6}{x+1}-2\right)dx$

$\left[6\ln|x+1|-2x\right]_0^2=6\ln 3-4$

$a=6$, $b=-4$이므로 $a+b=2$

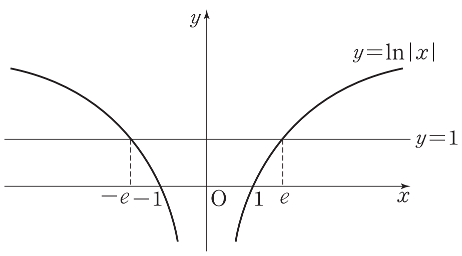
정답 ②

076 곡선과 좌표축 사이의 넓이

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

유리함수와 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 묻는 문제를 축대칭의 성질을 갖는 절댓값이 있는 로그함수와 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.

곡선 $y=\ln|x|$와 x축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



$y=\ln|x|$는 y축 대칭함수이고 직선 $y=1$과의 교점의 x좌표는 $x=\pm e$

구하는 넓이를 S라고 하면 $S=2\left(e-\int_1^e\ln x\,dx\right)$

$=2\left(e-\left[x\ln x-x\right]_1^e\right)=2(e-1)$

정답 ④

077 넓이가 서로 같을 조건

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

삼각함수에서 둘러싸인 부분의 넓이 사이의 관계식에서 만족하는 미지수를 묻는 문제를 초월함수와 직선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같을 때의 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

A의 넓이를 a, B의 넓이를 b라고 하자.

또한, 곡선 $y=e^x+x-1(0\le x\le 1)$와 x축, $x=k$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 c라고 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같으므로 $a+c=b+c$이다. $b+c=(1-k)e$이고

$a+c=\int_0^1(e^x+x-1)dx=\left[e^x+\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1$

$=\left(e+\frac{1}{2}-1-1\right)=e-\frac{3}{2}$

$a+c=b+c$이므로 $e-ke=e-\frac{3}{2}$

따라서 $k=\frac{3}{2e}$

정답 ③

078 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 묻는 문제를 초월함수와 직선으로 둘러싸인 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.

함수 $f(x)=x\sin x$라고 하면, $x\sin x=x$를 만족하는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $|\sin x|\le 1$이므로 $x\sin x\le x$

그러므로 둘러싸인 넓이는 부분적분법을 이용하여 구하면,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left\{\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right\}$

$=\frac{\pi^2}{8}-1$

정답 ②

079 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

역함수와 역함수 위의 점에서의 접선과 좌표축으로 둘러싸인 넓이를 묻는 문제를 역함수가 존재하기 위한 범위의 최댓값과 최솟값을 찾고 그 점에서 함수들로 둘러싸인 부분의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=\{x^2+2ax+(a+1)\}e^x$에서

$f'(x)=\{x^2+2(a+1)x+(3a+1)\}e^x$

$e^x>0$이므로 실수 전체에서 $f(x)$가 역함수가 존재하려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2+2(a+1)x+(3a+1)\ge 0$이어야 한다.

즉, 판별식 $\frac{D}{4}=(a+1)^2-3a-1=a^2-a\le 0$이고 $0\le a\le 1$이므로

$\alpha=1$, $\beta=0$

$a=1$일 때, $f_1(x)=(x^2+2x+2)e^x$

$a=0$일 때, $f_2(x)=(x^2+1)e^x$

역함수의 성질에 따라 곡선 $y=g_1(x)$, 곡선 $y=g_2(x)$, x축, $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f_1(x)$, 곡선 $y=f_2(x)$, y축, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$\int_0^1\{f_1(x)-f_2(x)\}dx=\int_0^1\{(x^2+2x+2)-(x^2+1)\}e^x dx$

$=\int_0^1(2x+1)e^x dx$

부분적분법에 의해

$$\int_0^1 (2x+1)e^x dx = \Big[(2x+1)e^x\Big]_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx = 3e-1-2e+2=e+1$$

정답 ①

080 입체도형의 부피

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

삼각함수의 성질을 이용하여 입체도형이 부피를 묻는 문제를 도형을 좌표축 위에 대응하여 임의의 점에서의 단면적을 구하여 입체도형의 부피를 묻는 문제로 변형하였다.

지름 AB를 x축 위로 대응시키고 두 반원의 중심을 원점 O라고 하자. 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$이라고 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{16-x^2}$

삼각형 PQR의 넓이를 $S(x)$라고 하면,

$$S(x)=\frac{1}{2}\times(\sqrt{16-x^2})^2\times\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}(16-x^2)$$

구하고자 하는 부피를 V라고 하면

$$V=\int_{-4}^{4} S(x)dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-4}^{4}(16-x^2)dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^4(16-x^2)dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[16x-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^4=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(64-\frac{64}{3}\right)=\frac{64}{3}\sqrt{2}$$

정답 ⑤

081 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

곡선과 직선과 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 같을 때 미지수를 묻는 문제를 비슷한 유형으로 둘러싸인 도형의 넓이를 차를 묻는 문제로 변형하였다.

두 곡선 $y=xe^x$, $y=\sqrt{x}$의 교점의 x좌표를 p라 하면

$$a=\int_0^p(\sqrt{x}-xe^x)dx,\ b=\int_p^1(xe^x-\sqrt{x})dx$$

따라서 $a-b=\displaystyle\int_0^p(\sqrt{x}-xe^x)dx-\int_p^1(xe^x-\sqrt{x})dx$

$$=\int_0^p(\sqrt{x}-xe^x)dx+\int_p^1(\sqrt{x}-xe^x)dx$$

$$=\int_0^1(\sqrt{x}-xe^x)dx$$

$$=\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1-\left\{\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx\right\}$$

$$=\frac{2}{3}-(e-e+1)=-\frac{1}{3}$$

정답 ③

082 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

곡선과 원점을 지나는 직선이 접할 때 만들어지는 두 도형의 넓이를 묻는 문제를 곡선 밖의 점에서 접선과 곡선 사이의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.

$f'(x)=(1-x)e^{-x}$이고 $f''(x)=(x-2)e^{-x}$이다.

이제 점 $\left(0,\ \frac{4}{e^2}\right)$에서 곡선 $y=f(x)$에 제1사분면에서 접하게 그은 접선의 접점을 $(t,\ te^{-t})$라고 하면, 접선의 방정식은

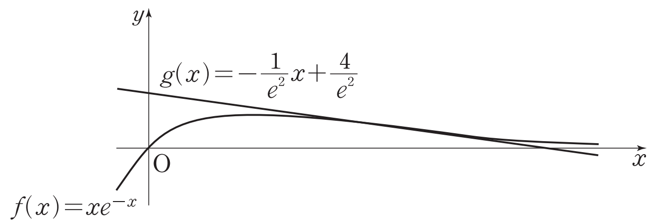
$y-te^{-t}=(1-t)e^{-t}(x-t)$

점 $\left(0,\ \frac{4}{e^2}\right)$를 지나므로

$\frac{4}{e^2}=t^2e^{-t}$이고 $t=2$ ($\because t>0$)

따라서 $g(x)=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$

접점의 좌표가 $\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$이고 $x=2$에서 변곡점을 가지므로 다음 그림과 같다.



$$\int_0^4|f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_0^2\{g(x)-f(x)\}dx+\int_2^4\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C$$

$$\int_0^2\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^2\left(-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}-xe^{-x}\right)dx=\frac{9}{e^2}-1$$

$$\int_2^4\{f(x)-g(x)\}dx=\int_2^4\left(xe^{-x}+\frac{1}{e^2}x-\frac{4}{e^2}\right)dx=-\frac{5}{e^4}+\frac{1}{e^2}$$

$$\int_0^2\{g(x)-f(x)\}dx+\int_2^4\{f(x)-g(x)\}dx=-\frac{5}{e^4}+\frac{10}{e^2}-1$$

따라서 $a=-5$, $b=10$, $c=-1$이므로

$a+b+c=4$

정답 ②

083 넓이가 서로 같을 조건

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

조건을 만족하는 함수의 두 부분의 넓이가 같아지는 곡선 위의 점의 y좌표를 묻는 문제를 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 비를 묻는 문제로 변형하였다.

$$S_1=\int_1^p\log_a x\,dx=\frac{1}{\ln a}\int_1^p\ln x\,dx=\frac{1}{\ln a}\Big[x\ln x-x\Big]_1^p$$

$$=\frac{1}{\ln a}(p\ln p-p+1)$$

곡선 $y=b^x$와 직선 $y=p$, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=b^x$의 역함수인 $y=\log_b x$와 직선 $x=p$, x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$S_2=\int_1^p\log_b x\,dx=\frac{1}{\ln b}\int_1^p\ln x\,dx=\frac{1}{\ln b}\Big[x\ln x-x\Big]_1^p$$

$$=\frac{1}{\ln b}(p\ln p-p+1)$$

$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\ln a}{\ln b}$이며, $a=b^4$이므로 $S_2=4S_1$

따라서 $k=4$

정답 ④

084 입체도형의 부피

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

단면의 넓이 적분을 통해서 두 입체도형의 부피의 차를 묻는 문제를 구간에 따라 다른 함수식이 주어졌을 때 조건을 만족하는 입체도형의 부피를 묻는 문제로 변형되었다.

$x<0$일 때와 $x\geq 0$일 때의 단면적의 넓이를 각각 $S_1(x)$, $S_2(x)$라 하면

$S_1(x)=-\frac{\pi}{8}\sin x$, $S_2(x)=\ln(x+1)$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi}{8}\int_{-\pi}^{0}(-\sin x)dx+\int_{0}^{e-1}\ln(x+1)dx\\&=\frac{\pi}{8}\Big[\cos x\Big]_{-\pi}^{0}+\int_{1}^{e}\ln t\,dt\\&=\frac{\pi}{4}+\Big[t\ln t-t\Big]_{1}^{e}\\&=\frac{\pi}{4}+1\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=1$이므로 $a+b=\frac{5}{4}$

정답 ①

PART 2 기하와 벡터

1 이차곡선

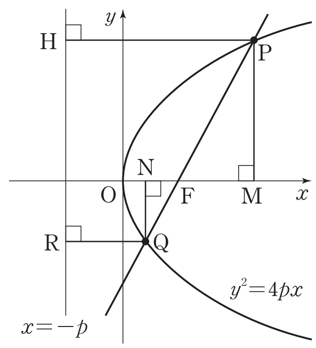
p. 46~50

3점 예상	085 ② 086 26 087 43 088 ③ 089 18 090 74
4점 예상	091 16 092 ① 093 ③ 094 ⑤

085 포물선의 방정식

이 문제의 변형 포인트! 개념, 원리 활용

포물선의 초점을 지나고 x축에 수직인 직선과 포물선의 두 교점 사이의 거리와 원점에서 초점까지의 거리의 비를 묻는 문제를 포물선의 초점을 지나는 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선과 포물선이 만나는 두 점 사이의 거리와 원점에서 초점까지의 거리의 비를 묻는 문제로 변형하였다.



위의 그림에서 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이고, 포물선 $y^2=4px$의 준선은 $x=-p$이다.
점 P에서 포물선의 준선과 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, M이라 하면

$\angle\mathrm{PFM}=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{FM}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PF}}$이고

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=2p+\overline{\mathrm{FM}}=2p+\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PF}}$, 즉 $\overline{\mathrm{PF}}=4p$

또한, 점 Q에서 포물선의 준선과 x축에 내린 수선의 발을 각각 R, N이라 하면

$\angle\mathrm{QFN}=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{FN}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{QF}}$이고,

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QR}}=2p-\overline{\mathrm{FN}}=2p-\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{QF}}$, 즉 $\overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{4}{3}p$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=4p+\dfrac{4}{3}p=\dfrac{16}{3}p$이므로

$\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{OF}}}=\dfrac{16}{3}$

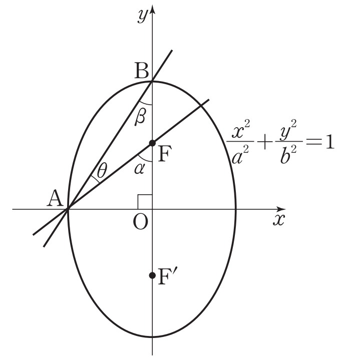
정답 ②

086 타원의 방정식

이 문제의 변형 포인트! 문항의 축소, 확대 변형

타원의 두 꼭짓점을 지나는 직선과 초점과 꼭짓점을 지나는 두 직선이 이루는 각이 θ일 때 $\tan\theta$의 값을 묻는 문제를 조건을 바꿔서 비슷한 유형으로 삼각함수의 덧셈정리를 이용해서 $\tan\theta$의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\mathrm{F}(0,\ c)$이라 하면 $\overline{\mathrm{OB}}=2\overline{\mathrm{OF}}$이므로 $b=2c$, $c^2=b^2-a^2$, $a=\sqrt{3}c$
삼각형 OFA에서 $\angle\mathrm{OFA}=\alpha$, 삼각형 OBA에서 $\angle\mathrm{OBA}=\beta$라 하면
$\angle\mathrm{BAF}=\theta=\alpha-\beta$



그러므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{a}{c}-\dfrac{a}{2c}}{1+\dfrac{a}{c}\times\dfrac{a}{2c}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{5}\sqrt{3}$$

따라서 $m^2+n^2=5^2+1^2=26$

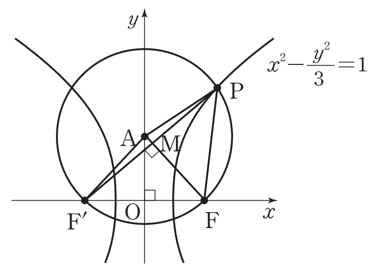
정답 26

087 쌍곡선의 방정식

이 문제의 변형 포인트! 자료 상황의 활용

쌍곡선의 정의와 주어진 조건을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이를 묻는 문제를 쌍곡선의 정의와 이등변삼각형의 성질과 피타고라스의 정리를 이용하여 조건을 만족하는 원의 중심의 좌표를 묻는 문제로 변형하였다.

$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\,(c>0)$이라 하면 $c^2=1+3=4$에서
$\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$
또 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2$
이때 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FF'}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=6$



사각형 AF′FP에서 두 대각선 AF와 PF′의 교점을 M이라 하면
두 삼각형 AF′F와 APF에서 $\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{FP}}$, $\overline{\mathrm{AF}}$는 공통이므로 두 삼각형 AF′F와 APF는 합동이다. 따라서 선분 AF는 선분 PF′를 수직 이등분한다.

원 C의 반지름을 r이라 하자. 피타고라스의 정리에 의하여

직각삼각형 MF′F에서 $\overline{\mathrm{FF'}}=4$, $\overline{\mathrm{F'M}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{FM}}=\sqrt{7}$

직각삼각형 AF′M에서 $r^2=(r-\sqrt{7})^2+3^2$, $r=\dfrac{8}{\sqrt{7}}$

직각삼각형 AOF에서 $k^2+2^2=r^2$, $k^2=\left(\dfrac{8}{\sqrt{7}}\right)^2-2^2=\dfrac{36}{7}$

그러므로 $m+n=7+36=43$

정답 43

088 포물선의 평행이동

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

조건의 초점과 준선을 만족하도록 포물선을 평행 이동하여 미지수를 묻는 문제를 포물선의 식을 정리하여 초점과 준선을 만족하는 미지수의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

초점을 F라 하고, 초점 F에서 준선 $y=-2$에 내린 수선의 발을 M이라 하자.

$\mathrm{F}(3,\ 4)$, $\mathrm{M}(3,\ -2)$이므로 두 점 F, M의 중점의 좌표는 $(3,\ 1)$이다.

포물선의 정의에 의하여 선분 FM의 길이는 $2p=6$, $p=3$이고, 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 1)$이므로 구하고자 하는 포물선은 꼭짓점이 원점인 포물선을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 포물선이다.

따라서 포물선의 방정식은 $(x-3)^2=12(y-1)$

이 식을 정리하면 $x^2-6x-12y+21=0$, 즉 $a=-6$, $b=-12$, $c=21$

$a+b+c=-6-12+21=3$

정답 ③

089 쌍곡선의 방정식

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

쌍곡선의 두 초점 사이의 거리를 묻는 문제를 초점을 공유하는 두 쌍곡선과 초점을 지나고 y축에 평행한 직선과의 교점을 쌍곡선의 정의를 이용하여 선분의 길이를 묻는 문제로 변형하였다

쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{k^2}=1$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=5$, $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=3$

따라서 직각삼각형 PF′F에서 $\overline{\mathrm{F'F}}=4$, 즉 $2c=4$, $c=2$,

$\mathrm{F'}(-2,\ 0)$, $\mathrm{F}(2,\ 0)$

두 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{k^2}=1$, $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{l^2}=1$의 초점이 같으므로

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{l^2}=1$에서

$2^2=2+l^2$, $l^2=2$이므로 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$이다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$에 $x=2$를 대입하면 $y=\pm\sqrt{2}$, 즉 $\overline{\mathrm{QF}}=\sqrt{2}$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{QF'}}-\overline{\mathrm{QF}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{QF'}}=3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{QF'}}^2=(3\sqrt{2})^2=18$

정답 18

090 포물선의 방정식

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

x축에 수직인 직선이 포물선과 만나는 두 점에서 초점까지의 거리를 포물선의 정의를 이용하여 준선까지의 거리로 바꾼 후 수열의 합을 묻는 문제를 y축과 수직인 직선이 포물선과 만나는 점에서 초점까지의 거리를 포물선의 정의를 이용하여 준선까지의 거리로 바꾼 후 수열의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

점 P_n이 포물선 $y^2=3x$ 위의 점이므로 $y=n$을 대입하면 $x=\dfrac{n^2}{3}$

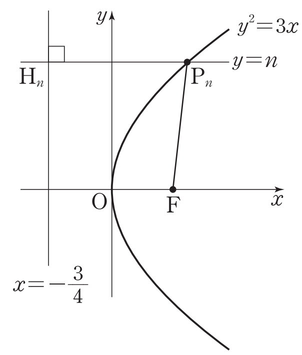
즉 $\mathrm{P}_n\left(\dfrac{n^2}{3},\ n\right)$

포물선 $y^2=3x$의 준선의 방정식은 $x=-\dfrac{3}{4}$이다.

점 P_n에서 준선에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{FP}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=\dfrac{n^2}{3}+\dfrac{3}{4}$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{8}\overline{\mathrm{FP}_n}=\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{n^2}{3}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{8\times9\times17}{6}+\frac{3}{4}\times8=74$



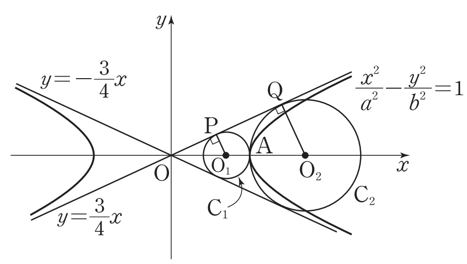
정답 74

091 쌍곡선의 점근선

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

쌍곡선의 점근선 위의 두 점에서 조건에 맞는 직사각형을 이용하여 주축의 길이를 묻는 문제를 쌍곡선의 점근선에 접하는 두 원의 반지름의 길이의 합을 이용하여 주축의 길이를 묻는 문제로 변형하였다.

쌍곡선 C의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하고, 그림과 같이 두 원 C_1, C_2가 지나는 쌍곡선 C의 꼭짓점을 A라 하자.



원 C_1의 반지름을 r_1이라 하고, 중심을 O_1, 원 C_1과 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$의 접점을 P라 하자.

직각삼각형 $\mathrm{OO_1P}$에서 $\angle\mathrm{POO_1}=\theta$라 하면

$\tan\theta=\frac{3}{4}$, $\sin\theta=\frac{3}{5}=\frac{r_1}{\overline{OO_1}}$, $\overline{OO_1}=\frac{5}{3}r_1$

따라서 $\overline{OA}=\overline{OO_1}+\overline{O_1A}$, $a=\frac{5}{3}r_1+r_1$, $r_1=\frac{3}{8}a$

한편, 원 C_2의 반지름을 r_2라 하고, 중심을 O_2, 원 C_2와 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 접점을 Q라 하자.

직각삼각형 OO_2Q에서 $\angle QOO_2=\theta$이므로

$\frac{r_2}{\overline{OO_2}}=\frac{3}{5}$, $\overline{OO_2}=\frac{5}{3}r_2$

따라서 $\overline{OA}=\overline{OO_2}-\overline{O_2A}$, $a=\frac{5}{3}r_2-r_2$, $r_2=\frac{3}{2}a$

$r_1+r_2=\frac{3}{8}a+\frac{3}{2}a=\frac{15}{8}a=15$, $a=8$

따라서 구하는 주축의 길이는 $2a=16$

정답 16

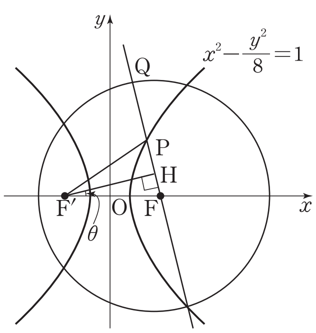
092 쌍곡선의 방정식

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

타원의 정의와 이등변삼각형의 성질을 이용하여 직선까지 거리를 묻는 문제를 쌍곡선의 정의와 이등변삼각형의 원리를 이용하여 기울기를 묻는 문제로 변형하였다.

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{F'P}-\overline{FP}=2$, $\overline{FP}=4$이므로 $\overline{F'P}=6$

즉 삼각형 PF′F는 $\overline{F'P}=\overline{F'F}=6$, $\overline{FP}=4$인 이등변삼각형이다.



점 F′에서 선분 FP에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{FH}=\overline{PH}=2$

$\angle FF'H=\theta$라 하면

$\sin\theta=\frac{\overline{FH}}{\overline{F'F}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\tan\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$이므로

$$\tan(\angle PF'F)=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4}{7}\sqrt{2}$$

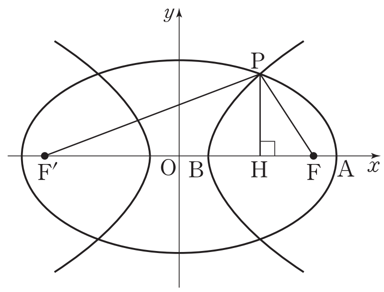
따라서 $m+n=7+4=11$

답 ①

093 타원과 쌍곡선의 방정식

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

초점을 공유하는 타원과 쌍곡선의 교점과 타원과 쌍곡선이 x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 묻는 문제를 초점을 공유하는 타원과 쌍곡선의 교점과 초점 사이의 cos 값이 주어졌을 때 두 점 사이의 거리를 묻는 문제로 변형하였다.



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\cos(\angle F'FP)=\frac{2}{3}$이므로 $\overline{PF}=3k$, $\overline{FH}=2k$로 놓으면

$\overline{PH}=\sqrt{5}k$, $\overline{F'H}=\overline{F'F}-\overline{FH}=8-2k$

직각삼각형 PF′H에서 $\overline{PF'}^2=\overline{PH}^2+\overline{F'H}^2$, $41=5k^2+(8-2k)^2$

$9k^2-32k+23=0$, $(k-1)(9k-23)=0$, $k=1$ 또는 $k=\frac{23}{9}$

그러므로 $\overline{PF}=3$ 또는 $\frac{23}{3}$이다.

점 P가 제1사분면의 점이므로 $\overline{PF}<\overline{PF'}=\sqrt{41}$이어야 하므로 $\overline{PF}=3$이다.

$A(a, 0)$, $B(b, 0)$이라 하면 타원, 쌍곡선의 정의에 의하여

$\sqrt{41}+3=2a$, $\sqrt{41}-3=2b$ 이므로

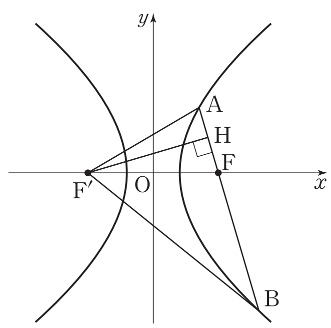
$\overline{AB}=a-b=\frac{\sqrt{41}+3}{2}-\frac{\sqrt{41}-3}{2}=3$

정답 ③

094 쌍곡선의 방정식

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

타원의 한 초점을 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점이 타원 위에 있는 직각삼각형에서 두 초점과 직각이 아닌 다른 한 점으로 이루어진 삼각형의 넓이를 묻는 문제를 쌍곡선의 한 초점을 꼭짓점으로 하고 두 초점을 지나는 삼각형의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.



점 F′에서 선분 AF에 내린 수선의 발을 H, $\angle AF'F=\theta$라 하자.

$\cos\theta=\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{7}{8}$, $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{F'H}}{\overline{F'F}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\overline{F'F}=8$이므로 $\overline{F'H}=2\sqrt{15}$, $\overline{FH}=2$이다.

따라서 삼각형 AF′F가 $\overline{AF'}=\overline{F'F}=8$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AF}=2\overline{FH}=4$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{BF'}-\overline{BF}=\overline{AF'}-\overline{AF}=8-4=4$

$\overline{\mathrm{BF}}=t$라 하면 $\overline{\mathrm{BF'}}=t+4$이고,
직각삼각형 F′BH에서 $\overline{\mathrm{BF'}}^2=\overline{\mathrm{F'H}}^2+\overline{\mathrm{BH}}^2$
$(t+4)^2=(2\sqrt{15})^2+(t+2)^2$, $t=12$
그러므로 삼각형 AF′B의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{F'H}}=\frac{1}{2}\times16\times2\sqrt{15}=16\sqrt{15}$

정답 ⑤

2 평면 곡선의 접선

p. 51~53

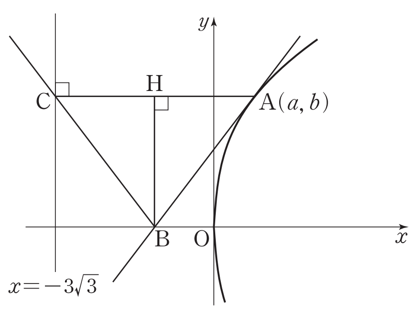
3점 예상	095 39	096 31	097 ⑤	098 ⑤	099 ⑤
4점 예상	100 250	101 ⑤	102 20		

095 포물선의 접선

이 문제의 변형 포인트! 문항의 축소, 확대 변형

포물선 위의 한 점에서 그은 접선의 방정식과 조건들을 이용해서 초점의 x좌표와 접점의 y좌표를 묻는 문제를 접점에서의 접선이 다른 직선과 이루는 도형이 정삼각형일 때 접점의 좌표를 묻는 문제로 변형하였다.

점 A(a, b)는 포물선 $y^2=12\sqrt{3}x$ 위의 점이므로 $b^2=12\sqrt{3}a$
$y^2=12\sqrt{3}x$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$2y\frac{dy}{dx}=12\sqrt{3}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{6\sqrt{3}}{y}$(단, $y\neq0$)



점 A에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=\frac{6\sqrt{3}}{b}$, 즉 점 A에서의 접선의 방정식은
$y-b=\frac{6\sqrt{3}}{b}(x-a)$
$b^2=12\sqrt{3}a$임을 이용하여 $y=0$을 대입하면 $-b=\frac{6\sqrt{3}}{b}(x-a)$
$-b^2=6\sqrt{3}(x-a)$, $-12\sqrt{3}a=6\sqrt{3}(x-a)$, $x=-a$
그러므로 B$(-a, 0)$이다.
점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.
삼각형 ABC가 정삼각형이므로 점 H는 선분 AC의 중점이고 좌표는 $(-a, b)$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AH}}=2a$, $\overline{\mathrm{AC}}=4a$
그러므로 $\overline{\mathrm{AC}}=a+3\sqrt{3}=4a$, $a=\sqrt{3}$, $b^2=12\sqrt{3}a=36$
$a^2+b^2=3+36=39$

정답 39

096 타원의 접선

이 문제의 변형 포인트! 문항의 축소, 확대 변형

타원의 두 꼭짓점과 타원 위의 다른 한 점을 잡아서 삼각형의 넓이가 최대가 되는 점의 좌표를 묻는 문제를 타원 위의 점에서 접선에 수직인 법선이 x축과 만나는 교점을 이용해서 접점을 묻는 문제로 변형하였다.

점 P(a, b)가 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ 위의 점이므로 $\frac{a^2}{36}+\frac{b^2}{27}=1$
$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$\frac{x}{18}+\frac{2y}{27}\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{4y}$(단, $y\neq0$)
점 P에서의 접선의 기울기는 $-\frac{3a}{4b}$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{4b}{3a}$이다.
따라서 점 P에서의 접선에 수직이고, 점 P를 지나는 직선의 방정식은
$y-b=\frac{4b}{3a}(x-a)$
이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로
$-b=\frac{4b}{3a}(1-a)$, $-3a=4-4a$, $a=4$
$\frac{a^2}{36}+\frac{b^2}{27}=1$에서 $b^2=15$
그러므로 $a^2+b^2=16+15=31$

정답 31

097 음함수의 미분법

이 문제의 변형 포인트! 문항의 축소, 확대 변형

음함수 미분을 이용한 접선의 기울기를 묻는 문제를 접점에서 음함수 미분을 이용한 기울기가 주어졌을 때 음함수의 미정계수를 묻는 문제로 변형하였다.

점 $(0, 0)$을 곡선 $ae^x+e^y=xy+b$에 대입하여 정리하면
$a+1=b$
곡선 $ae^x+e^y=xy+b$를 x에 대하여 미분하면
$ae^x+e^y\frac{dy}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{ae^x-y}{x-e^y}$이므로
$x=0$, $y=0$을 대입하면 $\frac{dy}{dx}=-a=-2$
따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $a+b=5$

정답 ⑤

098 매개변수로 나타낸 함수의 접선의 방정식

이 문제의 변형 포인트! 자료 상황의 활용

삼각함수로 표시된 매개변수의 미분을 이용한 접선의 기울기를 묻는 문제를 다항함수로 나타낸 매개변수의 접선의 기울기를 묻는 문제로 변형하였다.

$\frac{dx}{dt}=2t+4t^3+6t^5+\cdots+20t^{19}$, $\frac{dy}{dt}=1+3t^2+5t^4+\cdots+21t^{20}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+3t^2+5t^4+\cdots+21t^{20}}{2t+4t^3+6t^5+\cdots+20t^{19}}$$

$t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 $t=1$을 대입한 값과 같으므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+3+5+\cdots+21}{2+4+6+\cdots+20}=\frac{\sum_{k=1}^{11}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{10}(2k)}=\frac{11^2}{10\times11}=\frac{11}{10}$$

정답 ⑤

099 타원의 접선의 방정식

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

접선의 기울기가 주어졌을 때 음함수의 미분을 이용한 타원 위의 접점을 묻는 문제를 타원의 접선과 원점 사이의 거리를 이용하여 접점의 좌표를 묻는 문제로 변형하였다.

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$라 하면

$\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{12}=1$, 즉 $3a^2+4b^2=48$ …… ㉠

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{16}+\frac{by}{12}=1$, 즉 $3ax+4by-48=0$

원점에서 직선 $3ax+4by-48=0$ 사이의 거리를 구하면

$\frac{48}{\sqrt{9a^2+16b^2}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$, $9a^2+16b^2=180$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a^2=4$, $b^2=9$, 즉 $a=2$, $b=3$

따라서 $a+b=5$

정답 ⑤

100 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

매개변수로 나타낸 곡선 위의 점에서의 접선과 법선과 x축으로 이루어진 도형의 넓이를 묻는 문제를 삼각함수를 이용하여 매개변수로 나타낸 곡선 위의 점에서의 접선과 법선과 y축으로 이루어진 삼각형의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.

점 $\mathrm{P}(5,\ 9)$가 주어진 곡선 위의 점이므로

$\sec t+2=5$, $2\sqrt{2}\tan t+1=9$에서

$\sec t=3$, $\tan t=2\sqrt{2}$

또 $\frac{dx}{dt}=\sec t\tan t$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{2}\sec^2 t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sqrt{2}\sec^2 t}{\sec t\tan t}=\frac{2\sqrt{2}\sec t}{\tan t}$$

점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{2\sqrt{2}\times3}{2\sqrt{2}}=3$

직선 l_1 : $y-9=3(x-5)$, $y=3x-6$

직선 l_2 : $y-9=-\frac{1}{3}(x-5)$, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{32}{3}$

따라서 직선 l_1이 y축과 만나는 점의 y좌표는 -6,

직선 l_2가 y축과 만나는 점의 y좌표는 $\frac{32}{3}$이므로

$S=\frac{1}{2}\times\left(\frac{32}{3}+6\right)\times5=\frac{125}{3}$

그러므로 $6S=250$

정답 250

101 포물선의 접선

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

두 포물선의 교점에서의 각각의 접선과 축이 만나는 교점으로 이루어진 도형의 넓이를 묻는 문제를 두 포물선의 교점에서의 각각의 접선과 축이 만나는 교점으로 이루어진 도형의 넓이가 주어질 때 포물선에 포함된 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

두 포물선 $y^2=-4(x-k)$, $y^2=16x$의 교점 중 제1사분면의 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하자.

$b^2=-4(a-k)$, $b^2=16a$이 성립하고, 연립하여 정리하면

$a=\frac{k}{5}$, $b^2=\frac{16}{5}k$ …… ㉠

한편, $y^2=-4(x-k)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\frac{dy}{dx}=-4$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{y}$ (단, $y\neq0$)

점 P에서의 접선의 기울기는 $-\frac{2}{b}$이므로 접선의 방정식은

$y-b=-\frac{2}{b}(x-a)$

이 접선이 x축과 만나는 점 A의 좌표는 $y=0$을 대입하여 구하면

$-b=-\frac{2}{b}(x-a)$, $x=a+\frac{b^2}{2}=a+\frac{-4(a-k)}{2}=-a+2k$

따라서 $\mathrm{A}(-a+2k,\ 0)$

또, $y^2=16x$의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$2y\frac{dy}{dx}=16$, $\frac{dy}{dx}=\frac{8}{y}$(단, $y\neq0$)

점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{8}{b}$이므로 접선의 방정식은

$y-b=\frac{8}{b}(x-a)$

이 접선이 x축과 만나는 점 B의 좌표는 $y=0$을 대입하여 구하면

$-b=\frac{8}{b}(x-a)$, $x=a-\frac{b^2}{8}=a-\frac{16a}{8}=-a$

따라서 $\mathrm{B}(-a,\ 0)$

삼각형 PBA의 넓이가 20이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times b=20$, $\frac{1}{2}\times2k\times b=20$, $kb=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $b^2=\frac{16}{5}k$을 $k^2b^2=400$에 대입하여 정리하면

$k^2\times\frac{16}{5}k=400$, $k^3=125$

그러므로 $k=5$

정답 ⑤

102 쌍곡선의 접선

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

쌍곡선의 점근선과 지나는 한 점을 이용하여 쌍곡선의 방정식을 구하고 접선이 쌍곡선과 만나는 두 점의 x좌표의 합을 묻는 문제를 쌍곡선 위의 접점에서 접선이 점근선인 새로운 쌍곡선을 두 초점 사이의 거리를 이용하여 선분의 길이를 묻는 문제로 변형하였다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{4x}{4}-\dfrac{6y}{12}=1$, $y=2x-2$이다.

점근선 $y=2x-2$은 $y=2x$을 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동 하였으므로

두 초점이 y축 위에 있는 쌍곡선 C는 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{(y+2)^2}{b^2}=-1$

점근선의 기울기가 2 이므로 $\dfrac{b}{a}=2$, $b=2a$ 이고,

두 초점 사이의 거리가 $6\sqrt{5}$ 이므로

$a^2+b^2=a^2+4a^2=(3\sqrt{5})^2$, $a^2=9$, $b^2=4a^2=36$

따라서 쌍곡선 C의 방정식은 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{(y+2)^2}{36}=-1$

이 방정식에 $x=4$를 대입하여 정리하면

$\dfrac{16}{9}-\dfrac{(y+2)^2}{36}=-1$, $(y+2)^2=100$

$y=8$ 또는 $y=-12$

따라서 선분 AB의 길이는 20

정답 20

3 평면벡터의 연산

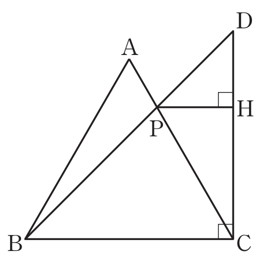
p. 54~55

3점 예상	103 ④	104 ③	105 ①
4점 예상	106 32	107 ⑤	

103 평면벡터의 뜻

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

도형에서 방향이 같은 벡터를 닮음과 피타고라스의 정리를 이용하여 크기의 제곱을 묻는 문제를 두 도형을 이용하여 길이비를 묻는 문제로 변형하였다.



교점 P에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라 하고,

$\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{PH}}=t$이라 하면

$\overline{\mathrm{CH}}=4-t$이고 $\angle\mathrm{PCH}=\dfrac{\pi}{6}$이므로 직각삼각형 PHC에서

$\overline{\mathrm{PH}} : \overline{\mathrm{HC}}=1 : \sqrt{3}=t : 4-t$, 즉 $t=2(\sqrt{3}-1)$

$\overline{\mathrm{DP}} : \overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{DH}} : \overline{\mathrm{HC}}=2(\sqrt{3}-1) : 2(3-\sqrt{3})=1 : \sqrt{3}$

따라서 $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

정답 ④

104 평면벡터의 덧셈과 뺄셈

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

도형에서 벡터의 덧셈의 크기를 이용하여 삼각형의 넓이를 묻는 문제를 정육각형내의 벡터의 연산의 크기를 묻는 문제로 변형하였다.

$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FE}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{FA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{FB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{FC}}$

이때 정육각형의 대각선의 교점을 O라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{FO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{FC}}|=4$

정답 ③

105 평면벡터의 연산

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

평면벡터의 실수배와 평행선의 원리를 이용하여 도형의 넓이를 묻는 문제를 평면벡터의 실수배 조건을 하나 늘려서 도형의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\overrightarrow{\mathrm{PB}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

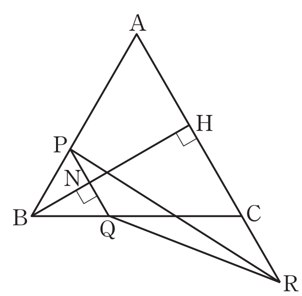
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=3\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=5\overrightarrow{\mathrm{CR}}=-5\overrightarrow{\mathrm{RC}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}+\overrightarrow{\mathrm{RC}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$이므로

삼각형 PQR은 다음 그림과 같다.



$\overline{\mathrm{BP}} : \overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BQ}} : \overline{\mathrm{BC}}=1 : 3$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$는 평행하고,

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$

점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H, 선분 BH가 선분 PQ와 만나는 점을 N이라 하자.

선분 BH는 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 높이이므로

$\overline{\mathrm{BH}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BN}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3}$,

따라서 $\overline{\mathrm{NH}}=\overline{\mathrm{BH}}-\overline{\mathrm{BN}}=2\sqrt{3}$

삼각형 PQR의 넓이는

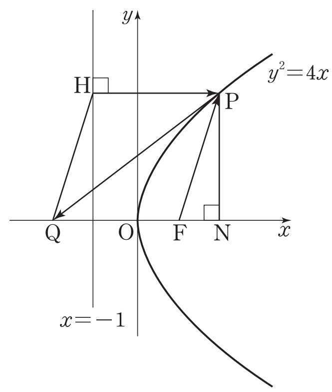
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{NH}}=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

정답 ①

106 평면벡터의 덧셈

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

쌍곡선의 초점과 쌍곡선 위의 점에서 벡터의 차의 크기를 쌍곡선의 정의를 이용하여 다른 벡터의 크기를 묻는 문제를 포물선 위에서의 벡터로 응용하여 크기를 묻는 문제로 변형하였다.



그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위에 있는 제1사분면의 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 N, 평행사변형 PHQF가 되도록 x축 위에 점 Q를 정하면

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}+\overrightarrow{\mathrm{PF}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=4\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PH}}=a+1,\ \overline{\mathrm{FN}}=a-1$

$\overline{\mathrm{QN}}=2a,\ \overline{\mathrm{PN}}=b$이므로 직각삼각형 PQN에서 피타고라스의 정리에 의하여

$(2a)^2+b^2=(4\sqrt{5})^2,\ 4a^2+b^2=80$ ...... ㉠

점 P가 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$b^2=4a$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$4a^2+4a=80,\ a^2+a-20=0,\ (a-4)(a+5)=0$

$a=4$ 또는 $a=-5$

점 P는 제1사분면의 점이므로 $a=4$, $b^2=16,\ b=4$

따라서 $\mathrm{P}(4,\ 4)$

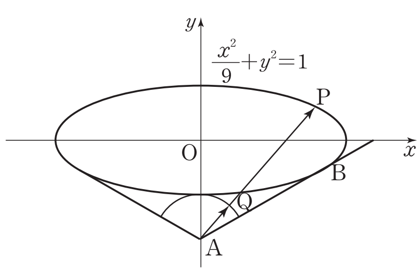
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=4^2+4^2=32$

정답 32

107 평면벡터의 연산

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

벡터의 합의 단위벡터의 자취의 길이를 묻는 문제를 타원 위의 점에서의 단위벡터의 자취의 길이를 묻는 문제로 변형하였다.



점 A에서 타원 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$에 그은 접선의 접점을 $\mathrm{B}(a,\ b)$라 하자.

점 B에서의 접선의 방정식은 $\frac{ax}{9}+by=1$ 이고,

점 $\mathrm{A}(0,\ -2)$를 지나므로

$-2b=1,\ b=-\frac{1}{2}$이고, 점 B가 타원 위의 점이므로

$\frac{a^2}{9}+b^2=1$, $\frac{a^2}{9}+\frac{1}{4}=1,\ a^2=\frac{27}{4},\ a=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$

점 A에서 그은 접선의 접점은 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ 또는 $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이다.

이때 점 B를 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$라 하면 직선 AB의 기울기는

$$\frac{-\frac{1}{2}+2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

즉, 직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각은 $\frac{\pi}{6}$이다. 따라서 직선 AB와 y축 사이의 각은 $\frac{\pi}{3}$이다.

타원 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$은 y축에 대칭이므로 점 P가 타원 위를 움직일 때

점 Q는 중심이 A이고 반지름이 1 인 원의 일부인 중심각이 $\frac{2\pi}{3}$인 호 위를 움직인다.

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 길이는 $\frac{2\pi}{3}$이다.

정답 ⑤

4 평면벡터의 성분과 내적

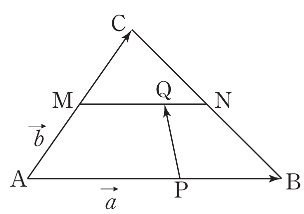
p. 56~58

3점 예상	108 14	109 ①	110 ⑤	111 ①	112 ④
4점 예상	113 ②	114 42			

108 위치벡터의 활용

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

위치벡터를 이용하여 한 벡터를 평행하지 않은 두 벡터로 나타낼 때 두 벡터의 계수를 묻는 문제로 비슷한 유형으로 내분점의 위치만 다르게 해서 두 벡터의 합으로 나타낼 때 계수의 합을 묻는 문제로 변형하였다.



$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{MN}}-\frac{3}{5}\vec{a}$

$=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{a}$

$=-\frac{4}{15}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

따라서 $m=-\frac{4}{15}$, $n=\frac{1}{2}$ 이므로

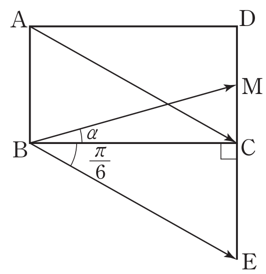
$60(m+n)=14$

정답 14

109 벡터의 내적

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

평면도형에서 벡터의 내적을 묻는 문제를 두 벡터가 이루는 각이 특수각이 아닌 경우 삼각함수 덧셈정리를 이용하여 내적을 묻는 문제로 변형하였다.



그림과 같이 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}$가 되도록 하는 선분 CD의 연장선 위의 점을 E라 하자.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$가 이루는 각의 크기 θ는 $\angle\mathrm{MBE}$와 같다.

직각삼각형 MBC에서 $\angle\mathrm{MBC}=\alpha$라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{CM}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{13}$, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{13}}$

$\theta=\alpha+\frac{\pi}{6}$이므로

$$\cos\theta=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\times\cos\frac{\pi}{6}-\sin\alpha\times\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{13}}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2\sqrt{13}}$$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{BM}}|\cos\theta=4\times\sqrt{13}\times\frac{5}{2\sqrt{13}}=10$

정답 ①

110 벡터의 크기와 내적

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

평면도형에서 벡터의 내적을 이용하여 두 벡터가 이루는 각의 크기를 묻는 문제를 벡터를 하나 더 추가하여 벡터의 내적을 이용하여 두 벡터가 이루는 각의 크기를 묻는 문제로 변형하였다.

$2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$에서 $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$이므로

$|\vec{c}|^2=|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$9=4+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4$, 즉 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}$

따라서 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{8}$

정답 ⑤

111 평면벡터의 성분과 내적

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

평면벡터의 평행과 수직 등의 성질을 이용하여 벡터의 성분의 합을 묻는 문제를 평면벡터의 조건을 만족하는 벡터의 크기를 묻는 문제로 변형하였다.

$\vec{p}=(x, y)$라 하면

$\vec{p}+\vec{a}=(x+1, y-2)$, $\vec{b}+\vec{c}=(2, 6)$, $\vec{p}-\vec{c}=(x+1, y-7)$,

$\vec{p}-\vec{b}=(x-3, y+1)$이고, $(\vec{p}+\vec{a})\perp(\vec{b}+\vec{c})$이므로

$(x+1, y-2)\cdot(2, 6)=0$

$x+3y-5=0$ …… ㉠

$|\vec{p}-\vec{c}|=|\vec{p}-\vec{b}|$이므로 $|(x+1, y-7)|=|(x-3, y+1)|$

$(x+1)^2+(y-7)^2=(x-3)^2+(y+1)^2$

$x-2y+5=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$x=-1$, $y=2$이므로 $\vec{p}=(-1, 2)$

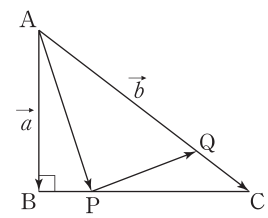
따라서 $|\vec{p}|=\sqrt{5}$

정답 ①

112 벡터의 내적의 활용

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

이등변삼각형에서 벡터의 내적을 묻는 문제를 직각삼각형에서 벡터의 내적을 묻는 문제로 변형하였다.



위의 그림에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$이라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}=\frac{-3\vec{a}+2\vec{b}}{4}$이고,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2=9$이므로

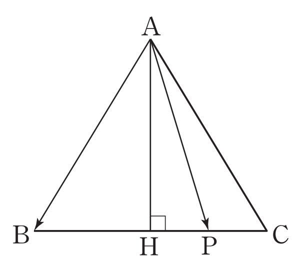
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}\right)\cdot\left(\frac{-3\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{16}(-9|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2)$$
$$=\frac{1}{16}(-81+27+50)$$
$$=-\frac{1}{4}$$

정답 ④

113 벡터의 크기의 최솟값 구하기

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

직각삼각형에서 두 벡터의 합이 최소일 때 선분의 길이를 묻는 문제를 정삼각형에서 두 벡터의 합이 최소일 때 선분의 길이를 묻는 문제로 변형하였다.



선분 BP를 2 : 1로 내분하는 점을 M이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{3}$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=3\overline{\mathrm{AM}}$

이때 선분 AM의 길이가 최소가 되는 값은 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이이다.

한편, 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에서 선분 AH는 정삼각형의 높이이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BH}}=2$

그리고 $\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{HP}}=2:1$이므로 $\overline{\mathrm{HP}}=1$

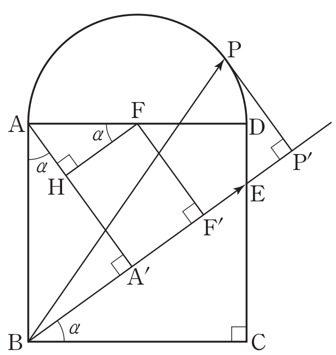
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HP}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{13}$

정답 ②

114 벡터의 내적의 최대, 최소

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

평면도형에서 부등식의 영역을 만족하는 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 묻는 문제를 평면도형에서 내적의 최댓값과 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.



$\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\overline{\mathrm{CE}}=\frac{3}{4}\overline{\mathrm{CD}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{BE}}=\sqrt{4^2+3^2}=5$이고

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{BE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}||\overrightarrow{\mathrm{BP}}|\cos\theta$

$\quad=5|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|\cos\theta$

한편 위의 그림과 같이 직선 BE에 수직이고 반원에 접하는 직선과 직선 BE가 만나는 점을 P′, 선분 AD의 중점 F와 점 A에서 직선 BE에 내린 수선의 발을 각각 F′, A′이라 하면

$5|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|\cos\theta$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|\cos\theta$ 의 최솟값은 $\overline{\mathrm{BA'}}$, 최댓값은 $\overline{\mathrm{BP'}}$이다.

그리고 점 F에서 선분 AA′에 내린 수선의 발을 H,

$\angle\mathrm{EBC}=\angle\mathrm{BAA'}=\angle\mathrm{AFH}=\alpha$라 하자.

직각삼각형 BCE에서 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AF}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{BA'}}=4\sin\alpha=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$, $\overline{\mathrm{A'F'}}=\overline{\mathrm{HF}}=2\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|\cos\theta$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{BA'}}=\frac{12}{5}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|\cos\theta$의 최댓값은 $\overline{\mathrm{BP'}}=\overline{\mathrm{BA'}}+\overline{\mathrm{A'F'}}+\overline{\mathrm{F'P'}}=\frac{12}{5}+\frac{8}{5}+2=6$

그러므로

최솟값 $m=5\times\frac{12}{5}=12$

최댓값 $M=5\times6=30$

$m+M=42$

정답 42

5 평면 곡선과 평면 운동

p. 59~60

3점 예상	115 ③	116 ②	117 ⑤
4점 예상	118 ①	119 ④	

115 곡선의 길이

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

주어진 범위에서 곡선의 길이를 묻는 문제를 곡선의 길이를 주고 범위에 포함된 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

$y=\frac{1}{2}(x^2-\ln\sqrt{x})$에서 $\frac{dy}{dx}=x-\frac{1}{4x}$이므로

$x=1$에서 $x=a$까지의 곡선의 길이는

$$\int_1^a\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx=\int_1^a\sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^a x+\frac{1}{4x}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\ln x\right]_1^a$$
$$=\frac{a^2-1}{2}+\frac{1}{4}\ln a$$
$$=4+\frac{1}{4}\ln 3$$

따라서 $a=3$

정답 ③

116 평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

시간 t에 대한 위치를 미분하여 속도와 가속도의 내적을 묻는 문제를 속도와 가속도가 수직인 t의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 $\vec{v}$, 가속도를 $\vec{a}$라고 하면

$\vec{v}=(2\sqrt{2}\sin t\cos t+1,\ 2\cos 2t)=(\sqrt{2}\sin 2t+1,\ 2\cos 2t)$이고

$\vec{a}=(2\sqrt{2}\cos 2t,\ -4\sin 2t)$

$\vec{v}\perp\vec{a}$이면 $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$이므로

$(\sqrt{2}\sin 2t+1,\ 2\cos 2t)\cdot(2\sqrt{2}\cos 2t,\ -4\sin 2t)$

$=4\sin 2t\cos 2t+2\sqrt{2}\cos 2t-8\cos 2t\sin 2t=0$

$-4\sin 2t\cos 2t+2\sqrt{2}\cos 2t=0$

$2\sqrt{2}\cos 2t(-\sqrt{2}\sin 2t+1)=0$

따라서 $\cos 2t=0$ 또는 $\sin 2t=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0<t<\frac{\pi}{4}$이므로 $t=\frac{\pi}{8}$

정답 ②

117 가속도의 크기

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

좌표평면 위를 움직이는 점의 시간 t에서의 속도와 직선의 방향벡터가 평행할 때 점이 움직인 거리를 묻는 문제를 가속도와 직선이 이루는 각이 주어졌을 때 가속도를 묻는 문제로 변형하였다.

점 P의 위치 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$x=\frac{1}{2}t^2+t,\ y=\frac{1}{6}t^3-1$이므로

속도 $\vec{v}=\left(t+1,\ \frac{1}{2}t^2\right)$, 가속도 $\vec{a}=(1,\ t)$

직선의 방향벡터 $\vec{u}=(2,\ -1)$이므로 가속도와 직선이 이루는 각 θ에 대하여

$\cos\theta=\frac{|2-t|}{\sqrt{5}\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

양변을 제곱하여 정리하면 $t=\frac{3}{4}$

따라서 가속도 $\vec{a}=\left(1,\ \frac{3}{4}\right)$이므로 가속도의 크기는

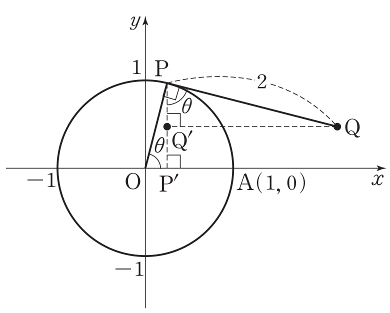
$\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

정답 ⑤

118 평면 위에서 점이 움직인 거리

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

좌표평면 위의 점이 움직인 거리를 묻는 문제를 원 위를 움직이는 점의 위치를 이용하여 점의 위치를 직접 나타내고 이동거리를 묻는 문제로 변형하였다.



t초 후의 점 P에 대하여 $\angle AOP=\theta$라 하면 점 P의 속력이 1이므로 $\theta=t$이다.

점 P를 x축에 내린 수선의 발을 P′, 점 Q를 선분 PP′에 내린 수선의 발을 Q′라 하면,

$\angle AOP=\angle QPP'=t$이므로

$\overline{PQ'}=2\cos t,\ \overline{QQ'}=2\sin t$

점 $P(\cos t,\ \sin t)$이므로 점 $Q(\cos t+2\sin t,\ \sin t-2\cos t)$

$\frac{dx}{dt}=-\sin t+2\cos t,\ \frac{dy}{dt}=\cos t+2\sin t$

따라서 점 Q가 움직인 거리는

$\int_0^2\sqrt{(-\sin t+2\cos t)^2+(\cos t+2\sin t)^2}\,dt$

$=\int_0^2\sqrt{5}\,dt=2\sqrt{5}$

(참고)

점 Q의 x좌표가 점 P의 x좌표보다 작은 경우는

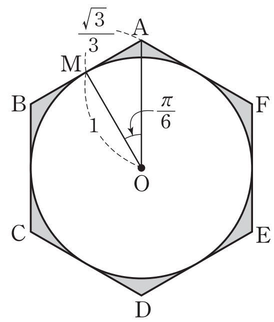
$\angle Q'PQ=t$이므로 $Q(\cos t-2\sin t,\ \sin t+2\cos t)$

정답 ①

119 원의 방정식

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

원의 벡터방정식에서 삼각형의 무게중심을 묻는 문제를 육각형과 원의 관계를 이용하여 영역의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.



두 대각선 AD, CF의 교점을 O라 하면 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO},\ \overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PF}=2\overrightarrow{PO}$이므로

$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PF})=4|\overrightarrow{PO}|^2\ge4$

따라서 $|\overrightarrow{PO}|^2\ge1$

점 P가 나타내는 영역의 넓이는 정육각형의 내부와 중심이 O이고 반지름이 1인 원의 외부의 공통부분의 넓이이다.

선분 AB의 중점을 M이라 할 때,

△AOM에서 반지름이 1이고 중심각이 $\frac{\pi}{6}$인 부채꼴을 제외한 부분과 같은 넓이가 12개 있으므로

$12\left\{(\triangle AOM\text{의 넓이})-\left(\text{반지름이 1이고 중심각이 }\frac{\pi}{6}\text{인 부채꼴의 넓이}\right)\right\}$

$=12\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}-\pi$

정답 ④

6 공간도형

p. 61~63

3점 예상	120 ①	121 ④	122 ⑤	123 ③
4점 예상	124 39	125 ①		

120 두 직선이 이루는 각

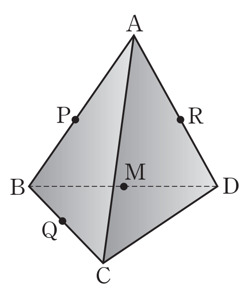
이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

공간도형에서 두 벡터가 이루는 각의 크기 θ에 대한 $\sin\theta$의 값을 묻는 문제를 정사면체에서 도형의 설질에 대한 참 · 거짓을 묻는 문제로 변형하였다.

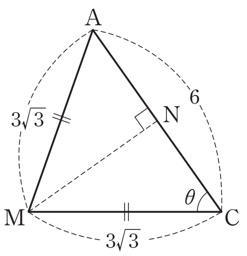
ㄱ. $\overline{BD}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{BD}\perp\overline{AM},\ \overline{BD}\perp\overline{CM}$이므로

$\overline{BD}\perp\triangle AMC$

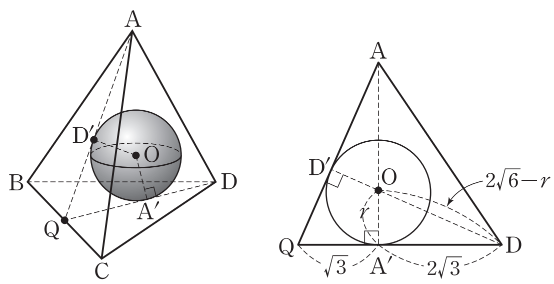
따라서 $\overline{BD}\perp\overline{AC}$ (참)



ㄴ. 선분 CD의 중점을 S라 하면 $\triangle$PQR과 평면 BCD가 만나서 생기는 교선은 $\overline{\mathrm{QS}}$이고 $\overline{\mathrm{QS}}$와 $\overline{\mathrm{CM}}$이 수직이고 $\overline{\mathrm{AC}}$는 $\triangle$PQR와 평행하고 $\overline{\mathrm{QS}}$에 수직이므로 삼각형 PQR과 평면 BCD가 이루는 각 θ는 $\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{CM}}$이 이루는 각의 크기와 같다.
$\triangle$AMC는 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{CM}}=3\sqrt{3}$인 이등변삼각형이므로
$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (거짓)



ㄷ. 정사면체 ABCD에 내접하는 구를 $\triangle$AQD를 포함하는 평면으로 자른 단면은 그림과 같다.
꼭짓점 A, D에서 내린 수선의 발을 각각 점 A′, D′라 하면 $\overline{\mathrm{AA'}}$, $\overline{\mathrm{DD'}}$라 하면 두 선분은 정사면체의 높이와 같다.
피타고라스정리에 의해
$(2\sqrt{6}-r)^2=r^2+(2\sqrt{3})^2$
따라서 $r=\frac{\sqrt{6}}{2}$ (거짓)

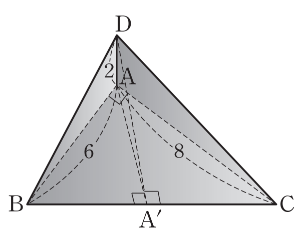


정답 ①

121 삼수선의 정리

이 문제의 변형 포인트!	**문항의 축소, 확대 변형**

평면과 평면 밖의 점에서의 삼수선의 정리에 의한 선분의 길이를 묻는 문제를 입체도형에서 삼수선의 정리를 이용하여 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.



점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 A′라 하면 $\triangle$ABC는 직각삼각형이므로
$\overline{\mathrm{BC}}=10$, $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AA'}}$
$6\times8=10\times\overline{\mathrm{AA'}}$

즉, $\overline{\mathrm{AA'}}=\frac{24}{5}$
$\overline{\mathrm{AD}}\perp\triangle\mathrm{ABC}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{AA'}}$이므로 삼수선의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{DA'}}$
$\triangle$AA′D에서 피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{DA}}^2+\overline{\mathrm{AA'}}^2=\overline{\mathrm{DA'}}^2$
$2^2+\left(\frac{24}{5}\right)^2=\overline{\mathrm{DA'}}^2$
$\overline{\mathrm{DA'}}=\frac{26}{5}$
따라서 $\triangle$BCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times10\times\frac{26}{5}=26$

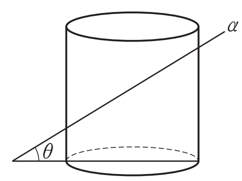
정답 ④

122 정사영

이 문제의 변형 포인트!	**개념, 원리 활용**

정사영을 이용하여 두 평면이 이루는 각 θ에 대한 $\cos\theta$의 값을 묻는 문제를 원기둥을 자른 단면인 타원의 방정식에 대해서 장축의 길이를 알 때, 두 평면이 이루는 각 θ에 대한 $\cos\theta$의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

원기둥이 평면 α와 만나서 생긴 타원이 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10\sqrt{3}$을 만족하므로 타원의 장축의 길이는 $10\sqrt{3}$이다.
타원의 장축을 밑면으로 정사영 시킨 도형은 밑면의 지름의 길이와 같으므로
$10\sqrt{3}\times\cos\theta=10$
따라서 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

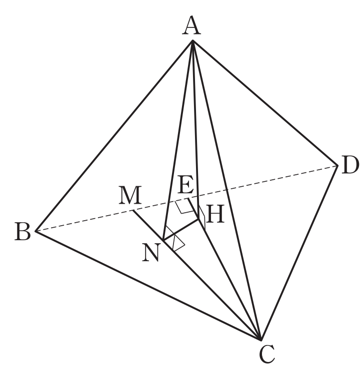


정답 ⑤

123 삼수선의 정리

이 문제의 변형 포인트!	**문항의 축소, 확대 변형**

정사면체 내부의 선분의 길이를 묻는 문제를 한 변의 길이가 다른 정사면체의 내부를 내분하는 점과 수선의 발 사이의 거리를 묻는 문제로 변형하였다.



그림과 같이 선분 BD의 중점을 E, 꼭짓점 A에서 면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 CE를 2:1으로 내분하는 점이다. 그리고 선분 AH는 평면 BCD와 수직이고, 선분 AN은 선분 CM과 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여 선분 HN과 선분 CM은 서로 수직이다.

직각삼각형 CEM에서 $\overline{CE}=3\sqrt{3}$, $\overline{ME}=1$,

$\overline{CM}=\sqrt{\overline{CE}^2+\overline{ME}^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

직각삼각형 ACH에서 $\overline{CH}=\frac{2}{3}\times\overline{CE}=2\sqrt{3}$,

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$

두 직각삼각형 CHN, CME가 서로 닮음이므로

$\overline{CH}:\overline{CM}=\overline{HN}:\overline{ME}$, $2\sqrt{3}:2\sqrt{7}=\overline{HN}:1$,

$\overline{HN}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

따라서 직각삼각형 ANH에서

$\overline{AN}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HN}^2}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2}=\sqrt{\frac{171}{7}}=\frac{3\sqrt{133}}{7}$

정답 ③

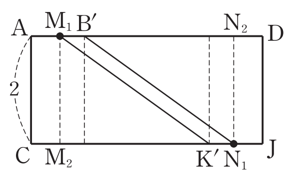
124 이면각

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

삼각기둥에서 잘린 두 평면이 이루는 각에 대한 $\cos\theta$의 값을 묻는 문제를 정육각기둥에서의 두 평면이 이루는 각에 대한 미지수의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

점 B, M에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 각각 B′, M_1, 점 K, N에서 $\overline{CJ}$에 내린 수선의 발을 각각 K′, N_1이라 하면,

□BNKM를 □AGJD에 정사영한 도형은 그림과 같다.

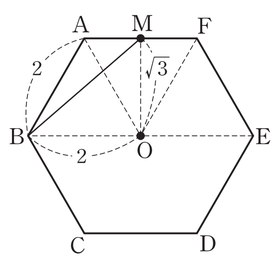


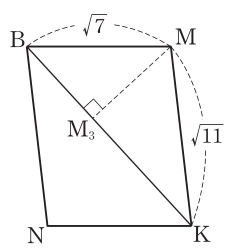
M_1에서 $\overline{CJ}$에 내린 수선의 발을 M_2, N_1에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 N_2라 하면

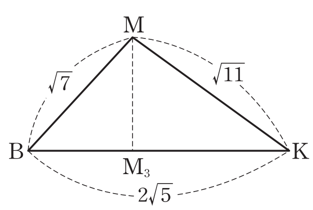
$\overline{AM_1}=\frac{1}{2}$, $\overline{AC}=2$이므로

정사영한 도형의 넓이는 $\overline{M_1B'}\times\overline{M_1M_2}=1$

□BNKM은 $\overline{BM}=\sqrt{7}$, $\overline{MK}=\sqrt{11}$인 평행사변형이고







점 M에서 $\overline{BK}$로 내린 수선의 발을 M_3라고 하면 $\overline{BK}=2\sqrt{5}$이므로

$\overline{BM_3}=x$라 하면 피타고라스 정리에 의해

$\overline{MM_3}^2=\overline{BM}^2-\overline{BM_3}^2=\overline{MK}^2-\overline{M_3K}^2$

$=7-x^2=11-(2\sqrt{5}-x)^2$

따라서 $x=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

피타고라스의 정리에 의해

$\overline{MM_3}^2=7-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{19}{5}$

$\overline{MM_3}=\frac{\sqrt{95}}{5}$

그러므로 □BNKM의 넓이는 $2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{95}}{5}=2\sqrt{19}$

따라서 $\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{19}}=\frac{\sqrt{19}}{38}$이므로

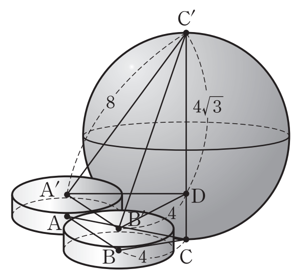
$a+b=39$

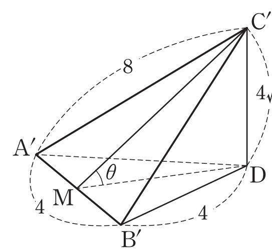
정답 39

125 이면각

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

정사영을 이용해서 두 도형을 포함한 평면이 이루는 각을 묻는 문제를 구와 원기둥 사이의 관계를 이용한 이면각을 묻는 문제로 변형하였다.





그림과 같이 선분 CC′에서 원기둥의 높이만큼을 제외한 선분을 C′D라 하면 $\overline{C'D}=4\sqrt{3}$

△ABC와 △A′B′D는 서로 평행하고 합동이므로

△A′B′D는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

그러므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{A'C'}=8$

$\overline{A'B'}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{C'M}$과 $\overline{MD}$가 이루는 각은 평면 ABC와 평면 A′B′C′가 이루는 각 θ와 같다.

또한, △A′B′C′는 $\overline{A'C'}=\overline{B'C'}=8$인 이등변삼각형이므로

$\overline{C'M}=2\sqrt{15}$

△ABC은 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로 $\overline{MD}=2\sqrt{3}$

따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{MD}}{\overline{C'M}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

정답 ①

7 공간좌표

p. 64~66

3점 예상	126 ⑤	127 ③	128 ④	129 ②	130 ⑤
4점 예상	131 ③	132 ⑤	133 7		

126 공간좌표

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

좌표공간의 점을 축에 대칭이동시키고 다시 평면에 대해서 대칭이동시킨 점의 좌표를 묻는 문제를 평면에 내린 수선의 발과 평면에 대칭한 점을 연결한 직선이 평면과 이루는 각이 주어졌을 때 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

$P(a, 1, 2)$에서 zx평면에 내린 수선의 발 A는 $(a, 0, 2)$

y축에 대하여 대칭이동시킨 점 B는 $(-a, 1, -2)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{4a^2+17}$

점 A를 xy평면에 내린 수선의 발을 A′라 하면 A′는 $(a, 0, 0)$

점 B를 xy평면에 내린 수선의 발을 B′라 하면 B′는 $(-a, 1, 0)$이므로

$\overline{A'B'}=\sqrt{4a^2+1}$

$\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$\dfrac{\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+17}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 $a^2=\dfrac{15}{4}$

정답 ⑤

127 공간에서 선분의 내분점, 외분점

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

좌표공간의 두 점을 각각 내분한 점과 외분한 점이 놓여있는 위치에 따라 미지수를 묻는 문제를 두 점을 내분하는 점이 축 위의 점일 때 내분하는 비를 묻는 문제로 변형하였다.

두 점 $A(1, a, 2)$, $B(-3, 2, -1)$을 잇는 선분 $\overline{AB}$를 $m : n$으로 내분하는 점을 P라 하면 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{-3m+n}{m+n}, \dfrac{2m+an}{m+n}, \dfrac{-m+2n}{m+n}\right)$

점 P는 z축 위의 점이므로 $\dfrac{-3m+n}{m+n}=0$, $\dfrac{2m+an}{m+n}=0$

위 식에서 $n=3m$이고 n, m은 서로소인 자연수이므로 $m=1$, $n=3$이다.

$2m+an=0$에서 $a=-\dfrac{2}{3}$

따라서 $m+n+a=\dfrac{10}{3}$

정답 ③

128 구의 방정식

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

좌표공간의 두 점의 내분점이 구의 중심일 때 미지수를 묻는 문제를 두 점을 내분하는 점을 이용하여 구의 반지름을 묻는 문제로 변형하였다.

두 점 $A(-5, 1, 6)$, $B(4, 1, -3)$을 잇는 선분 $\overline{AB}$를 $1 : 2$로 내분하는 점 P의 좌표는 $(-2, 1, 3)$이다.

그러므로 지름의 길이 $\overline{PB}=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$

따라서 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$

정답 ④

129 공간에서 선분의 내분점, 외분점

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

좌표공간의 점을 축과 평면에 내린 두 수선의 발 사이의 거리를 묻는 문제를 무게중심을 이용한 정사영이 일치하도록 하는 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

삼각형 ABC의 무게중심은

$G_1\left(\dfrac{a-2+1}{3}, \dfrac{1+b+0}{3}, \dfrac{-2+6+4}{3}\right)=\left(\dfrac{a-1}{3}, \dfrac{b+1}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$

삼각형 BCD의 무게중심은

$G_2\left(\dfrac{-2+1+4}{3}, \dfrac{b+0+2b}{3}, \dfrac{6+4+2}{3}\right)=(1, b, 4)$

두 점 G_1, G_2를 xy평면에 정사영시킨 점은 각각

$\left(\dfrac{a-1}{3}, \dfrac{b+1}{3}, 0\right)$, $(1, b, 0)$이므로

$\dfrac{a-1}{3}=1$, $a=4$

$\dfrac{b+1}{3}=b$, $b=\dfrac{1}{2}$

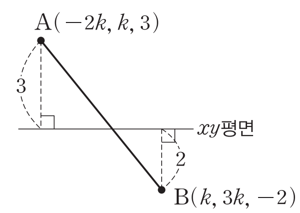
따라서 $a+b=\dfrac{9}{2}$

정답 ②

130 공간에서 선분의 내분점, 외분점

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

좌표공간의 평면과 점 사이의 거리관계로 외분점을 묻는 문제를 평면과 점 사이의 거리관계로 내분점을 묻는 문제로 변형하였다.



xy평면과 두 점 A, B사이의 거리는 각각 3, 2이므로 직선 AB와 xy평면이 만나는 점 P는 점 A와 점 B를 $3 : 2$로 내분하는 점이다.

그러므로 $P\left(\dfrac{-k}{5}, \dfrac{11k}{5}, 0\right)$

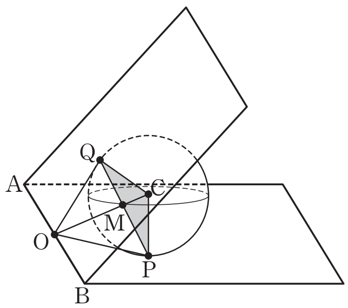
$\dfrac{10k}{5}=10$이므로 $k=5$

정답 ⑤

131 구의 방정식

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

좌표공간의 구와 직선이 접하는 접점의 자취를 묻는 문제를 구와 접하는 두 평면과 두 접점과 구의 중심으로 이루어진 삼각형의 넓이를 이용하여 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.



두 점 Q, P의 중점을 M이라 하면

$\overline{CA}=\overline{CB}$이므로 두 점 A, B의 중점 O(0, 0, 0)에 대해

$\overline{PQ}\perp\overline{CO}$이므로 $\overline{OC}\times\overline{MP}=\overline{OP}\times\overline{PC}$

$\overline{OC}=\sqrt{26}$, $\overline{OP}=\sqrt{22}$이므로

$\sqrt{26}\times\overline{MP}=2\sqrt{22}$이며 $\overline{MP}=\dfrac{2\sqrt{11}}{\sqrt{13}}$

$\overline{PC}^2=\overline{CM}\times\overline{CO}$이므로

$4=\sqrt{26}\times\overline{CM}$이며 $\overline{CM}=\dfrac{4}{\sqrt{26}}$

그러므로 $\triangle$QPC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{2\sqrt{11}}{\sqrt{13}}\times\dfrac{4}{\sqrt{26}}=\dfrac{8\sqrt{11}}{13\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{22}}{13}$

따라서 $a+b=17$

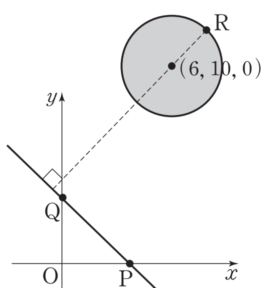
정답 ③

132 공간에서 선분의 내분점, 외분점

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

좌표공간의 도형 위의 두 점 사이의 거리의 최솟값을 묻는 문제를 점과 구를 평면에 정사영시켜 삼각형의 넓이의 최댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

P(2, 0, 0), Q(0, 2, 0)이고 점 R은 중심이 (6, 10, 0)이고 반지름이 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$인 xy평면 위의 원 내부(경계포함)에 있다.



$\overline{PQ}=2\sqrt{2}$이므로 직선 PQ와 원 내부(경계포함)의 점 R 사이의 거리가 최대일 때 삼각형 PQR의 넓이가 최대이다.

xy평면 위에서 직선 PQ의 방정식은 $x+y=2$이므로 xy 평면 위의 원의 중심 (6, 10, 0)과 직선 사이의 거리

$d=\dfrac{|6+10-2|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{14\sqrt{2}}{2}=7\sqrt{2}$

그러므로 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\left(7\sqrt{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)=17$

정답 ⑤

133 공간에서 선분의 내분점, 외분점

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

좌표공간의 점의 내분점과 길이, 직선들이 이루는 각들을 이용해서 삼각함수 값을 묻는 문제를 직접 좌표를 설정하고 삼각함수의 관계를 이용한 내분점을 묻는 문제로 변형하였다.

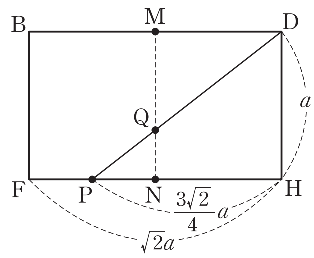
점 O(0, 0, 0)에 대해 삼각형 EHO에서 $\overline{OH}=a\sin\theta$, $\overline{OE}=a\cos\theta$

점 F에서 x축에 내린 수선의 발을 F′라 하면

$\angle\mathrm{HEF}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{EFF'}=\theta$

그러므로 $\overline{EF'}=a\sin\theta$, $\overline{FF'}=a\cos\theta$

따라서 H(0, $a\sin\theta$, 0), F($a\cos\theta+a\sin\theta$, $a\cos\theta$, 0)



$\overline{PH}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$이므로 $\overline{PH}:\overline{FH}=3:4$

따라서 점 P는 선분 $\overline{FH}$를 $1:3$으로 내분하는 점이므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{3(a\cos\theta+a\sin\theta)}{4},\ \dfrac{a\sin\theta+3a\cos\theta}{4},\ 0\right)$

또한, $\overline{PN}:\overline{NH}=1:2$이므로

$\overline{MN}$과 PD의 교점을 Q라 하면 $\overline{PQ}:\overline{QD}=1:2$

D(0, $a\sin\theta$, a)이므로

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a\cos\theta+a\sin\theta}{2},\ \dfrac{a\sin\theta+\dfrac{a\sin\theta+3a\cos\theta}{2}}{3},\ \dfrac{a}{3}\right)$

$=(3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 2)$

따라서

$\dfrac{a\cos\theta+a\sin\theta}{2}=3\sqrt{2}$,

$\dfrac{a\sin\theta+\dfrac{a\sin\theta+3a\cos\theta}{2}}{3}=3\sqrt{2}$

$\dfrac{a}{3}=2$이므로 $a=6$, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

따라서 $a+\tan^2\theta=6+1=7$

정답 7

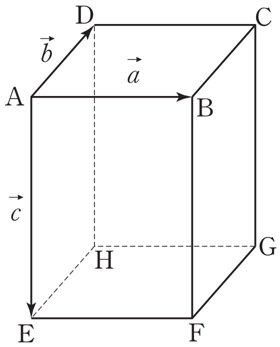
8 공간벡터 p. 67~69

3점 예상	134 ④	135 ①	136 ②	137 ⑤
4점 예상	138 ②	139 ⑤	140 12	

134 공간벡터의 덧셈과 뺄셈

이 문제의 변형 포인트!	**문항의 축소, 확대 변형**

정사면체에서 공간벡터의 덧셈과 뺄셈을 이용한 연산을 묻는 문제를 직육면체에서 공간벡터의 덧셈과 뺄셈을 이용한 벡터의 연산을 묻는 문제로 변형하였다.



$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라 하면

$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AH}=\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{c}+\vec{a}$이므로

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AF}=2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=2\overrightarrow{AG}$

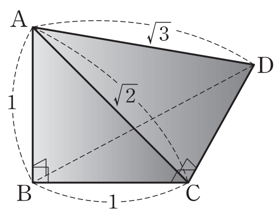
따라서 $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AF}|=|2\overrightarrow{AG}|=2\sqrt{38}$

정답 ④

135 공간벡터의 내적

이 문제의 변형 포인트!	**문항의 축소, 확대 변형**

공간벡터의 성분을 이용한 내적을 묻는 문제를 도형 위에서 벡터의 내적을 묻는 문제로 변형하였다.



벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\triangle BCD$는 수직이므로 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BD}$이고

조건에 의해 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CD}$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{CD}$

$\triangle ABC$에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AC}=\sqrt{2}$

$\triangle ACD$에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{CD}=1$

점 B를 원점으로 하고, $\overrightarrow{BA}$를 z축 양의 방향 $\overrightarrow{BC}$를 y축 양의 방향으로 하는 공간좌표를 설정하면

$A(0, 0, 1)$, $B(0, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(-1, 1, 0)$이므로

$\overrightarrow{AD}=(1, 1, -1)$, $\overrightarrow{BC}=(0, 1, 0)$

따라서 $\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{BC}=1$

다른 풀이

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA})\bullet\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}\\&=|\overrightarrow{BC}|^2\\&=1\end{aligned}$$

정답 ①

136 공간벡터의 내적

이 문제의 변형 포인트!	**개념, 원리 활용**

정육면체 위를 움직이는 임의의 점에 대한 두 벡터의 내적을 이용한 최솟값을 묻는 문제를 구 위의 임의의 점에 대한 두 벡터의 내적의 최댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

$\triangle O_1O_2P$는 정삼각형이므로

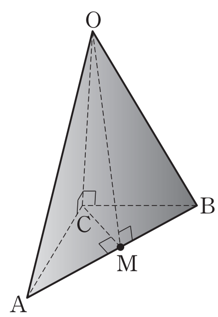
$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_1P}\bullet\overrightarrow{O_2Q}&=\overrightarrow{O_1P}\bullet(\overrightarrow{O_2O_1}+\overrightarrow{O_1Q})\\&=\overrightarrow{O_1P}\bullet\overrightarrow{O_2O_1}+\overrightarrow{O_1P}\bullet\overrightarrow{O_1Q}\\&=2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2\times2\times\cos\theta\,(0\le\theta\le\pi)\\&\le2\end{aligned}$$

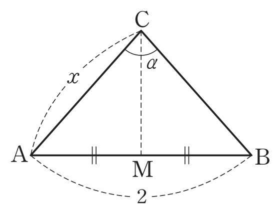
정답 ②

137 공간벡터의 내적의 성질

이 문제의 변형 포인트!	**문항의 축소, 확대 변형**

공간벡터의 내적의 성질을 이용한 사면체의 부피를 묻는 문제를 공간벡터의 내적의 성질을 이용해 도형을 유추해서 내적을 묻는 문제로 변형하였다.





$\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{BC}=0$이므로

$\overrightarrow{CO}$는 평면 ABC에 수직이고 $\triangle OAB$는 정삼각형이므로

$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{AB}$이다.

그러므로 삼수선의 정리에 의해 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CM}$

$\overline{AC}=x$, $\angle ACB=\alpha$라 하면

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{x}$이므로 $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\frac{2}{x^2}$

$\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BC}=x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{4}$, $x=\frac{3}{2}$

피타고라스 정리에 의해

$\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{CM}^2$, $\left(\frac{3}{2}\right)^2=1+\overline{CM}^2$,

$\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$이므로 $\overline{CM}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

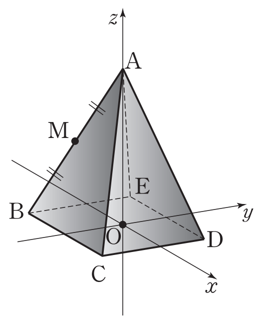
따라서 $\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{CM}=|\overrightarrow{CM}|^2=\frac{5}{4}$

정답 ⑤

138 두 공간벡터가 이루는 각의 크기

이 문제의 변형 포인트!	**문항의 축소, 확대 변형**

두 공간벡터가 이루는 각의 크기를 묻는 문제를 정사각뿔 도형 위의 벡터가 이루는 각의 크기를 묻는 문제로 변형되었다.



꼭짓점 A의 밑면 BCDE위로의 수선의 발을 O라 하고 점 O를 원점으로 하고 밑면과 각 변과 축이 평행하거나 수직이 되도록 좌표를 설정하면
$A(0,\ 0,\ 4)$, $B(-2,\ -2,\ 0)$, $C(2,\ -2,\ 0)$, $D(2,\ 2,\ 0)$,
$M(-1,\ -1,\ 2)$
$\overrightarrow{DM}=(-3,\ -3,\ 2)$, $\overrightarrow{AC}=(2,\ -2,\ -4)$이므로
$\cos\theta=\dfrac{-6+6-8}{\sqrt{22}\sqrt{24}}=\dfrac{-8}{4\sqrt{33}}=-\dfrac{2\sqrt{33}}{33}$

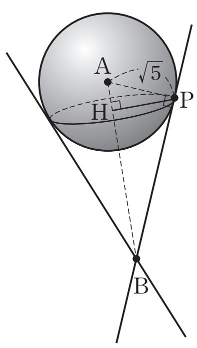
정답 ②

139 공간벡터의 성분과 크기

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

공간벡터의 구의 벡터방정식을 이용하여 거리의 최댓값을 묻는 문제를 구의 벡터방정식을 이용하여 구에 접하는 도형의 자취를 묻는 문제로 변형하였다.

점 C를 $(x,\ y,\ z)$라 하면
$|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5}\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=5$
$x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=5$이므로
S는 중심 $A(0,\ 1,\ 2)$이고 반지름 $\sqrt{5}$인 구이다.



점 B를 지나는 직선이 구 S와 만나서 생기는 점 P자취는 원이다.
점 P에서 선분 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
원의 둘레의 길이가 $\sqrt{15}\pi$이므로 $\overline{PH}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$
그러므로 $\angle HAP=\dfrac{\pi}{3}$이고,
$\angle ABP=\dfrac{\pi}{6}$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{20}$
따라서 $\sqrt{a^2+5}=\sqrt{20}$이므로 $a^2=15$

정답 ⑤

140 공간벡터의 내적

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

구 위의 점과 공간상의 점들이 주어진 내적 조건을 만족하는 경우에 내적이 최소가 되는 점을 묻는 문제를 정사면체와 접하는 구를 이용하여 벡터의 내적의 최댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

정삼각형 ACD의 내접원의 반지름은 $\sqrt{3}$
반구의 중심을 O, 모서리 $\overline{AD}$의 중점을 M이라 하면
$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BD}\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{OP}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CO}&=\overrightarrow{BD}\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}\right)\\&=\overrightarrow{BD}\cdot\frac{2}{3}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DM})\\&=\frac{2}{3}(\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DM})\\&=\frac{2}{3}\left(6\times6\times\frac{1}{2}-6\times3\times\frac{1}{2}\right)\\&=6\end{aligned}$$

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CO}$값이 일정하므로 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{OP}$값이 최대일 때 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CP}$값이 최대이다.
$\overrightarrow{BD}$와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각이 작을수록 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값이 커지므로 서로 평행할 때 최대이다.
그러므로 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{OP}$의 최댓값은 $6\sqrt{3}$
따라서 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CP}$의 최댓값은 $6+6\sqrt{3}$이므로 $a+b=12$

정답 12

9 도형의 방정식

p. 70~73

3점 예상	141 ⑤	142 ②	143 ⑤	144 ④	145 ①
4점 예상	146 ③	147 33	148 216	149 ④	150 ④

141 두 평면이 이루는 각의 크기

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

좌표공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 묻는 문제를 주어진 조건을 만족하는 평면을 묻는 문제로 변형하였다.

두 평면 $x+y+z-2=0$과 $x-2y+3z+5=0$의 교선을 지나는 평면의 방정식은
$(x+y+z-2)+k(x-2y+3z+5)=0$
$(1,\ 1,\ -1)$을 지나므로 $k=1$
그러므로 평면의 방정식은 $2x-y+4z+3=0$
xy평면의 법선벡터는 $(0,\ 0,\ 1)$이므로
$\cos\theta=\dfrac{4}{\sqrt{21}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$
따라서 $a+b=25$

정답 ⑤

142 두 직선이 이루는 각의 크기

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

두 직선의 위치 관계를 이용하여 직선의 방정식을 묻는 문제를 직선과 평면이 이루는 각이 수직일 때 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

직선의 방향벡터 $\vec{d}=(1,\ 2,\ 1)$과 평면의 법선벡터 $\vec{n}=(2,\ a,\ b)$가 서로 평행하므로

$(1,\ 2,\ 1)=t(2,\ a,\ b)$이며 $t=\frac{1}{2}$

$a=4,\ b=2$이므로 $ab=8$

정답 ②

143 점과 평면 사이의 거리

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

평행한 두 평면 사이의 거리를 묻는 문제를 평면 위의 임의의 점과 좌표공간 위의 두 점 사이의 관계를 이용한 점과 평면 사이의 거리를 묻는 문제로 변형하였다.

평면 α가 직선 l과 수직이므로

(평면 α의 법선벡터 $\vec{n}$)$=(3,\ 1,\ -1)$

평면 α가 점 $(0,\ 3,\ 0)$을 지나므로

평면의 방정식 α : $3x+y-z=3$

두 점 A, B의 중점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|=2|\overrightarrow{MP}|$이므로

$2|\overrightarrow{MP}|$가 최솟값을 가질 때 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$가 최솟값을 가진다.

즉, 점 P가 점 M에서 평면 α 위로 내린 수선의 발일 때 최솟값을 가지므로

점 $\mathrm{M}(1,\ 2,\ -1)$과 평면 α 사이의 거리

$$d=\frac{|3+2+1-3|}{\sqrt{9+1+1}}=\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

따라서 최솟값은 $\frac{6\sqrt{11}}{11}$

정답 ⑤

144 직선의 방정식

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

직선 위의 점이 직선과 이루는 각이 최대가 되는 좌표를 묻는 문제를 공간도형 위의 점을 이용한 내적의 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.

꼭짓점 E를 원점으로 하는 좌표공간를 설정하면

$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 4),\ \mathrm{B}(4,\ 0,\ 4),\ \mathrm{M}(0,\ 4,\ 2),\ \mathrm{E}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{F}(4,\ 0,\ 0)$이므로

직선 BM의 방정식은 $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-2}{2}$이므로

점 P의 좌표는 $(4t,\ -4t+4,\ 2t+2)$

따라서 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PE}=(-4t,\ 4t-4,\ 2-2t)\cdot(-4t,\ 4t-4,\ -2t-2)$

$$=36t^2-32t+12=4\left(3t-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{44}{9}$$

정답 ④

145 두 직선이 이루는 각의 크기

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

평면의 법선벡터와 직선의 방향벡터 사이의 관계를 이용하여 평면의 방정식을 묻는 문제를 벡터가 이루는 각의 크기를 이용하여 직선의 방정식을 묻는 문제로 변형하였다.

두 평면 $\alpha,\ \beta$의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1},\ \vec{n_2}$라 하면

$\vec{n_1}=(-2,\ 1,\ 1),\ \vec{n_2}=(1,\ -2,\ 1)$

직선 l의 방향벡터 $\vec{d}=(d_1,\ d_2,\ d_3)$라 하면

$\vec{n_1}\perp\vec{d},\ \vec{n_2}\perp\vec{d}$이므로

$-2d_1+d_2+d_3=0$ …… ㉠

$d_1-2d_2+d_3=0$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $d_1=d_2$

㉠에 대입하면 $d_2=d_3$이므로

$\vec{d}=(d_1,\ d_1,\ d_1),\ \vec{d}=(1,\ 1,\ 1)$

점 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 5)$를 지나므로

l : $x+1=y-2=z-5$이고,

$\mathrm{B}(1,\ a,\ b)$를 대입하면 $2=a-2=b-5$이므로

$a=4,\ b=7$

따라서 $a^2+b^2=65$

정답 ①

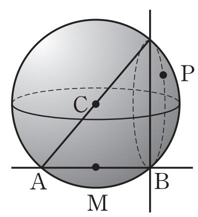
146 벡터로 나타낸 구의 방정식

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

벡터방정식을 이용한 구의 방정식을 묻는 문제를 구와 벡터의 조건들을 만족하는 도형의 넓이를 이용하여 미지수를 묻는 문제로 변형하였다.

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2$에서 $\overrightarrow{AP}\cos\theta=\overrightarrow{AB}$이므로

점 P는 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 평면과 구의 교선인 원 위에 있다. 또한 점 C의 좌표는 $(1,\ 2,\ a)$이다.



선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=(2,\ 0,\ 1)$$

원의 넓이는

$|\overrightarrow{CM}|^2\pi=\{1+4+(1-a)^2\}\pi=9\pi$

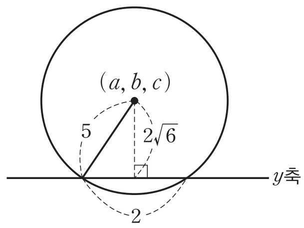
$(1-a)^2=4,\ a=3(\because a>0)$

정답 ③

147 구의 방정식

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

네 평면에 접하는 구의 중심을 묻는 문제를 구가 접하는 직선과 지나는 평면의 단면을 이용하여 구의 중심을 묻는 문제로 변형하였다.



y축과 만나는 두 점 사이의 거리가 2이므로

y축에 내린 수선의 발 $(0,\ b,\ 0)$과 구의 중심 사이의 거리는 $a^2+c^2=24$

구가 x축에 접하므로 x축에 내린 수선의 발 $(a,\ 0,\ 0)$과 구의 중심 사이의 거리는 $b^2+c^2=25$

구의 반지름이 5이고 원 C의 넓이는 $(25-b^2)\pi$이므로

원 C를 포함한 직원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}(25-b^2)(b+5)\pi=\frac{128}{3}\pi$

$b^3+5b^2-25b+3=0$

$b=3$이고, $a^2=8$, $c^2=16$

따라서 $a^2+b^2+c^2=33$

정답 33

148 직선의 방정식

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

조건을 만족하는 정육면체의 좌표를 유추하고 직선과 만나는 두 점 사이의 거리를 묻는 문제를 평면에 의해 잘린 단면의 넓이를 이용해서 정육면체의 한 변의 길이를 구하고 부피를 묻는 문제로 변형하였다.

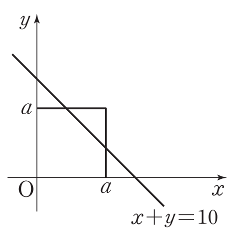
평면 $x+y+2z=10$과 xy평면의 법선벡터는 각각 $(1,\ 1,\ 2)$, $(0,\ 0,\ 1)$

이고 두 법선벡터가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

평면 $x+y+2z=10$과 xy평면의 교선의 방정식은 $z=0$을 대입하면

$x+y=10$

정육면체의 한 변의 길이 a가 $5<a<10$이므로



밑면이 평면 $x+y+2z=10$에 의해 잘린 단면의 넓이는

$\left\{a^2-\frac{1}{2}(2a-10)^2\right\}$이므로

$\left\{a^2-\frac{1}{2}(2a-10)^2\right\}=17\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3}$

$a^2-20a+84=0$

$(a-14)(a-6)=0$

$a=6$ $(\because 5<a<10)$

따라서 정육면체의 부피는 216이므로 $k=216$

정답 216

149 평면의 방정식

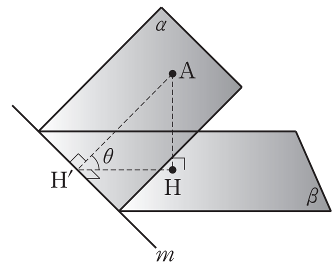
이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

평면의 방정식을 구하여 벡터의 내적을 묻는 문제를 평면의 법선벡터를 이용하여 평면이 이루는 각으로 정사영의 길이를 묻는 문제로 변형하였다.

직선 l 위의 점 $\mathrm{A}(t+1,\ 2t,\ -t+1)$이 평면 α와 만나므로

$2(t+1)-2t-t+1=4$

$t=-1$이며, $\mathrm{A}=(0,\ -2,\ 2)$



평면 β의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{H}=(a,\ b,\ c)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$와 $\overrightarrow{n_2}$가 평행하므로 $\mathrm{H}=(t,\ t-2,\ t+2)$

점 H는 평면 β위의 점이므로 $t+(t-2)+(t+2)=3$

따라서 $t=1$ 이므로 $\mathrm{H}(1,\ -1,\ 3)$

점 A에서 교선 m에 내린 수선의 발을 H′라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}+\overrightarrow{\mathrm{HX}}|$가 최소일 때는 $\mathrm{H'}=\mathrm{P}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}$의 β 위로의 정사영은 $\overline{\mathrm{HH'}}$

$\cos\theta=\frac{|2-1+1|}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$이므로 $\tan\theta=\frac{\sqrt{14}}{2}$, $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{3}$이므로

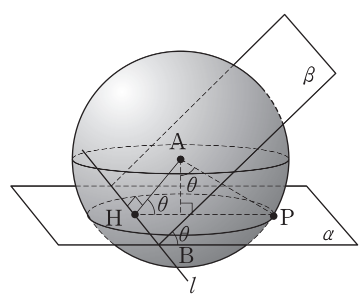
$\overline{\mathrm{HH'}}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{14}}{2}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$

정답 ④

150 두 평면이 이루는 각의 크기

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

좌표공간 위의 도형들이 이루는 각의 크기를 이용하여 정사영의 넓이를 묻는 문제를 조건에 맞는 도형이 이루는 각의 크기를 구하여 정사영의 넓이를 묻는 문제로 변형하였다.



점A에서 α 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는 $\frac{|2-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

점 A는 평면 β의 방정식을 만족시키므로 β위의 점이다.

조건 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$에서 $\overline{\mathrm{AH}}\perp\overline{\mathrm{AP}}$이므로

두 평면 α, β가 이루는 각을 θ라 하면 $\angle\mathrm{BAP}=\theta$

또한, 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(1,\ 0,\ -1)$, $\overrightarrow{n_2}=(1,\ -1,\ 0)$이므로

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 원 C의 반지름은 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

그러므로 원 C의 넓이는 $\dfrac{3}{2}\pi$

평면 β 위로의 정사영의 넓이는 $\dfrac{3}{2}\pi\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}\pi$

정답 ④

1 순열

p. 76~77

3점 예상	151 72　152 ③　153 ⑤
4점 예상	154 50

151 순열

이 문제의 변형 포인트! 문항의 축소, 확대 변형

수형도를 이용하여 정의역과 공역이 다르게 주어지고 특정한 조건을 만족하는 일대일함수의 개수를 묻는 문제를 정의역과 공역이 같을 때 특정한 조건을 만족하는 일대일 대응의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

조건 (가)에서 함수 f는 일대일 대응이다.
조건 (나)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 가질 수 있는 값은 1, 2, 5 또는 1, 3, 4이다.
(i) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 1, 2, 5의 값을 가지는 경우 $3!=6$
$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$은 나머지 값에 각각 하나씩 대응하므로 $3!=6$
따라서 $6\times6=36$가지
(ii) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 1, 3, 4의 값을 가지는 경우 $3!=6$
$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$은 나머지 값에 각각 하나씩 대응하므로 $3!=6$
따라서 $6\times6=36$가지
(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 함수의 개수는 $36+36=72$

정답 72

152 원순열

이 문제의 변형 포인트! 자료 상황의 활용

특정한 두 사람이 이웃하는 조건을 만족시키도록 원형의 탁자에 앉는 경우의 수를 묻는 문제를 특정한 사람의 옆이 반드시 채워지는 경우의 수를 묻는 문제로 변형하였다.

빈 좌석 한 개를 한 사람으로 생각하여 6명을 원형으로 나열하는 경우의 수에서 빈 좌석과 A가 이웃하는 경우의 수를 제외하면 된다.
6명을 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(6-1)!=5!=120$
빈 좌석과 A를 묶어서 한사람으로 생각하면 5명을 원형으로 나열하는 경우의 수는 $(5-1)!=4!=24$
빈 좌석과 A가 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 빈 좌석과 A가 이웃하도록 앉는 경우의 수는 $24\times2=48$
따라서 구하는 경우의 수는 $120-48=72$

정답 ③

153 중복순열

이 문제의 변형 포인트! 문항의 축소, 확대 변형

함숫값들의 연산 결과를 만족하는 경우를 수형도로 나타낸 후 함수의 개수를 묻는 문제를 같은 형태의 함숫값들 사이의 새로운 연산 결과를 만족하는 함수의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

(i) $f(1)=1$ 또는 $f(1)=4$ 또는 $f(1)=5$인 경우
$\{f(1)\}^2=f(2)+f(3)$을 만족시키는 함수 f는 없다.
(ii) $f(1)=2$인 경우
$2^2=1+3$ 또는 $2^2=2+2$이고 $f(4)$, $f(5)$의 값은 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이므로
$({}_2\mathrm{P}_2+1)\times{}_5\Pi_2=3\times5^2=75$
(iii) $f(1)=3$인 경우
$3^2=4+5$이고 $f(4)$, $f(5)$의 값은 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이므로
${}_2\mathrm{P}_2\times{}_5\Pi_2=2\times5^2=50$
따라서 구하는 함수 f의 개수는 $75+50=125$

정답 ⑤

154 같은 것이 있는 순열

이 문제의 변형 포인트! 자료 상황의 활용

주어진 카드 내에서 같은 숫자를 중복 사용하여 만들 수 있는 홀수의 개수를 묻는 문제를 주어진 카드 내에서 같은 숫자를 중복 사용하여 만들 수 있는 배수의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

4의 배수이기 위해서는 여섯 자리 자연수의 뒤에서 두 자리의 수가 4의 배수이어야 한다.
(i) 선택되지 않은 카드에 적힌 수가 0인 경우
뒤에서 두 자리가 12인 경우 $\frac{4!}{3!}=4$가지
뒤에서 두 자리가 32인 경우 $\frac{4!}{2!2!}=6$가지
$4+6=10$가지
(ii) 선택되지 않은 카드에 적힌 수가 1인 경우
뒤에서 두 자리가 12인 경우 가장 앞자리 수가 0인 경우를 제외해야 하므로 $\frac{4!}{3!}-1=3$가지
뒤에서 두 자리가 20인 경우 $\frac{4!}{3!}=4$가지
뒤에서 두 자리가 32인 경우 가장 앞자리 수가 0인 경우를 제외해야 하므로 $\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=12-3=9$가지
$3+4+9=16$가지
(iii) 선택되지 않은 카드에 적힌 수가 2인 경우 4의 배수가 될 수 없다.
(iv) 선택되지 않은 카드에 적힌 수가 3인 경우
뒤에서 두 자리가 12인 경우 가장 앞자리 수가 0인 경우를 제외해야 하므로 $\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=9$가지
뒤에서 두 자리가 20인 경우 $\frac{4!}{2!2!}=6$가지
뒤에서 두 자리가 32인 경우 가장 앞자리 수가 0인 경우를 제외해야 하므로 $\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=12-3=9$가지
$9+6+9=24$가지
따라서 구하는 4의 배수의 개수는 $10+16+24=50$

정답 50

2 조합

p. 78~80

3점 예상	155 ⑤	156 ③	157 ③	158 ②	159 ⑤
4점 예상	160 31	161 ②			

155 중복조합

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

중복조합을 이용하여 물건을 조건을 만족하도록 나누는 경우의 수를 묻는 문제를 물건을 받을 조건을 만족하는 경우를 나눈 후에 중복조합을 이용하여 경우의 수를 묻는 문제로 변형하였다.

사과를 받는 사람 수에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각한다.

(i) 사과를 받는 사람이 2명인 경우

4명 중 2명이 사과를 각각 2개, 1개씩 받으므로 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

사과를 받지 않은 사람 2명에게 각각 오렌지 1개씩을 먼저 나누어 주고 나머지 오렌지 3개를 4명의 사람들에게 나누어주는 경우의 수는

${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

따라서 이 경우의 수는 $12\times20=240$

(ii) 사과를 받는 사람이 3명인 경우

4명 중 3명이 사과를 각각 1개씩 받으므로 경우의 수는 ${}_4C_3=4$

사과를 받지 않은 사람 1명에게 오렌지 1개를 먼저 주고 나머지 오렌지 4개를 4명의 사람들에게 나누어주는 경우의 수는

${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4=35$

따라서 이 경우의 수는 $4\times35=140$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $240+140=380$

정답 ⑤

156 중복조합

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

중복조합을 이용하여 방정식과 부등식을 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수를 묻는 문제를 중복조합을 이용하여 방정식과 부등식을 만족하는 자연수의 순서쌍의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

(나)에서 $a+c<3+b$

(가)에서 $a+c=13-b$이므로

$13-b<3+b$

즉, $b>5$

$a=a'+1$, $b=b'+6$, $c=c'+1$ (a', b', c'은 음이 아닌 정수)이라 하면

$(a'+1)+(b'+6)+(c'+1)=13$

$a'+b'+c'=5$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 순서쌍 (a', b', c')의 개수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

정답 ③

157 중복조합

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

조합과 중복조합의 연산에서 자연수 n의 값을 묻는 문제를 순열과 조합과 중복조합을 모두 사용한 연산에서 자연수 n의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$(n+1)\times n\times(n-1)={}_{n+1}C_2+3\times\dfrac{(n+2)\times(n+1)\times n}{6}$

$n(n+1)(n-1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$

$n-1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{n+2}{2}$

따라서 $n=5$

정답 ③

158 중복조합의 활용

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

전개식에서 특정한 차수 이상을 갖는 항의 개수를 묻는 문제를 전개식에서 차수가 모두 홀수인 항의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

$(a+b+c)^{15}$의 전개식에서 각 항을 $a^xb^yc^z$라 하면

$x+y+z=15$

이때 x, y, z는 홀수이므로

$x=2x'+1$, $y=2y'+1$, $z=2z'+1$ (x', y', z'는 음이 아닌 정수)

$(2x'+1)+(2y'+1)+(2z'+1)=15$

$x'+y'+z'=6$

위 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 모든 순서쌍 (x', y', z')의 개수는 ${}_3H_6={}_8C_2=28$

정답 ②

159 조합

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

함숫값들 사이의 특정한 원소들 사이의 대소 관계를 만족하는 일대일 대응의 개수를 묻는 문제를 두 가지 조건을 모두 만족하는 함수의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

조건 (가)에서 $f(2n+2)-f(2n)\geq2$이므로 $f(6)>f(4)>f(2)$이고 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$은 서로 연속하는 자연수가 아니다. 1부터 7까지의 자연수 중 조건 (가)를 만족시키도록 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$에 각각 대응하는 3개의 자연수를 택하는 경우의 수는 ∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨에서 5개의 ∨ 중 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_3=\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

또한 조건 (나)에서 $f(2n+1)-f(2n-1)\geq1$이므로

$f(5)>f(3)>f(1)$

X의 원소 중 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$에 대응하는 서로 다른 3개의 자연수를 택하는 경우의 수는

${}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

$f(7)$의 값이 될 수 있는 경우의 수는 7

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$10\times35\times7=2450$

정답 ⑤

160 조합의 활용

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

경우를 두 가지로 나누어 경우의 수를 묻는 문제를 경우를 세 가지로 나누어 경우의 수를 묻는 문제로 변형하였다.

(i) 현미와 백미를 섞는 날이 1일인 경우

월	화	수	목	금
현미		현미		현미
백미	백미		백미	

백미를 사용하는 날을 선택하는 경우의 수 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

현미와 백미를 섞는 날 이외의 나머지 4일 중 잡곡을 2일 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$

$3\times6=18$

(ii) 현미와 백미를 섞는 날이 2일인 경우

월	화	수	목	금
현미		현미		현미
백미	백미	백미		
			잡곡	

백미를 사용하는 날을 선택하는 경우의 수 ${}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=3\times2=6$

현미와 백미가 모두 사용되지 않은 날 반드시 잡곡을 사용해야 하고, 잡곡이 사용되지 않고 한 가지 곡물만 사용된 2일 중 잡곡을 사용하는 날을 선택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$

$6\times2=12$

(iii) 현미와 백미를 섞는 날이 3일인 경우

나머지 2일 동안 각각 잡곡을 사용해야 하므로 경우의 수는 1

따라서 구하는 경우의 수는 $18+12+1=31$

정답 31

161 중복조합

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

홀수, 짝수 조건을 만족하면서 종이를 자를 수 있는 경우의 수를 묻는 문제를 색깔 조건도 추가되면서 종이를 자르는 경우의 수를 묻는 문제로 변형하였다.

(i) 왼쪽에서 첫 번째 조각에 홀수개의 정사각형이 있는 경우

나머지 조각에서 검은 정사각형의 개수가 흰 정사각형의 개수보다 작지 않도록 하기 위해서는 나머지 3개의 조각에는 짝수개의 정사각형이 있어야 한다.

4개의 조각 중 한 조각에만 홀수개의 정사각형이 있어야 한다.

즉, 각 조각의 정사각형의 개수가 '홀수/짝수/짝수/짝수'가 되도록 잘라야 한다.

(ii) 왼쪽에서 첫 번째 조각에 짝수개의 정사각형이 있는 경우

나머지 3개의 조각 중 한 개의 조각에만 홀수개의 정사각형이 있도록 잘라야 한다. 즉 각 조각의 정사각형의 개수가 '짝수/홀수/짝수/짝수' 또는 '짝수/짝수/홀수/짝수' 또는 '짝수/짝수/짝수/홀수'가 되도록 잘라야 한다.

(i), (ii)에서 잘라서 만든 4개의 조각 중 한 조각에만 홀수개의 정사각형이 있어야 한다.

'홀수/짝수/짝수/짝수'가 되도록 자르는 경우의 수는

$(2x-1)+2y+2z+2w=13$ (x, y, z, w는 자연수)에서

$x+y+z+w=7$

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$ (x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+(w'+1)=7$

$x'+y'+z'+w'=3$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z', w'의 순서쌍 (x', y', z', w')의 개수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_{4+3-1}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

'짝수/홀수/짝수/짝수', '짝수/짝수/홀수/짝수', '짝수/짝수/짝수/홀수'로 자르는 경우도 각각 20가지이므로 구하는 경우의 수는 $20\times4=80$

정답 ②

3 분할과 이항정리

p. 81~82

3점 예상	**162** ② **163** ③ **164** ② **165** ③
4점 예상	**166** 780

162 이항정리

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

이항정리에서 특정한 항이 존재하도록 하는 자연수 n의 개수를 묻는 문제를 전개식에서 존재할 수 있는 모든 항의 차수의 합을 수열로 나타낸 후 수열의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$\left(x^3+\dfrac{2}{x}\right)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r(x^3)^{n-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r={}_n\mathrm{C}_r2^rx^{3n-4r}$

따라서 $k=3n-4r$, $0\le r\le n$이므로

$a_n=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}(3n-4r)=3n(n+1)-2n(n+1)=n(n+1)$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}3a_n=3\sum_{n=1}^{5}n(n+1)=210$

정답 ②

163 이항정리의 활용

이 문제의 변형 포인트! **자료 상황의 활용**

이항계수의 성질을 이용한 로그 연산을 묻는 문제를 같은 형태의 이항계수의 또 다른 성질을 이용한 로그 연산을 묻는 문제로 변형하였다.

${}_8C_0+8\times{}_8C_1+8^2\times{}_8C_2+\cdots+8^8\times{}_8C_8=(1+8)^8=9^8=3^{16}$

$\log_3 3^{16}=16$

정답 ③

164 자연수의 분할

이 문제의 변형 포인트!	**개념, 원리 활용**

자연수를 같은 수를 포함하지 않고 2개 이상의 수로 분할하는 방법의 수를 묻는 문제를 2개 이상의 양의 약수로 분할하는 방법의 수를 묻는 문제로 변형하였다.

$8=4+4$

$=4+2+2$

$=4+2+1+1=2+2+2+2$

$=4+1+1+1+1=2+2+2+1+1$

$=2+2+1+1+1+1$

$=2+1+1+1+1+1+1$

$=1+1+1+1+1+1+1+1$

따라서 구하는 방법의 수는 $1+1+2+2+1+1+1=9$

정답 ②

165 이항정리

이 문제의 변형 포인트!	**문항의 축소, 확대 변형**

부분집합의 최대원소의 합을 묻는 문제를 원소의 개수가 3개인 부분집합의 최대원소의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$M(A_n)=8$인 집합 A_n는 $A_n=\{a, b, 8\}$ $(a<b<8)$이므로

집합 A_n의 개수는 $0, 1, 2, \cdots, 7$ 중 서로 다른 2개의 정수를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_8C_2=\frac{8\times7}{2}$

마찬가지로 $M(A_n)=k$ $(2\le k\le 8$, k는 정수)인 집합 A_n는

$A_n=\{a, b, k\}$ $(a<b<k)$이므로 이러한 집합 A_n의 개수는 $0, 1, 2, \cdots, k-1$ 중 서로 다른 2개의 정수를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_kC_2=\frac{k(k-1)}{2}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p} M(A_n)&=2\times{}_2C_2+3\times{}_3C_2+4\times{}_4C_2+5\times{}_5C_2+\cdots+8\times{}_8C_2\\&=\sum_{k=2}^{8}k\times{}_kC_2\\&=\sum_{k=2}^{8}k\times\frac{k(k-1)}{2}\\&=\sum_{k=1}^{8}\frac{k^2(k-1)}{2}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2-\frac{8\times9\times17}{6}\right\}\\&=\frac{1}{2}(1296-204)\\&=546\end{aligned}$$

정답 ③

166 집합의 분할

이 문제의 변형 포인트!	**자료 상황의 활용**

전체 학생을 3개의 모둠으로 나누는 경우의 수를 묻는 문제를 남학생과 여학생을 구분하고 모둠의 전체 학생 수 등의 조건을 만족하는 경우의 수를 묻는 문제로 변형하였다.

각 조에는 여학생이 적어도 1명씩 포함되므로 여학생 4명을 3개의 조로 나누기 위해서는 각 조의 여학생 수가 2명, 1명, 1명이어야 한다.

여학생을 나누는 경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=6$

남학생 5명을 3개의 조로 나누기 위해서는 각 조의 남학생 수가 (2명, 2명, 1명) 또는 (3명, 1명, 1명)이어야 한다.

(ⅰ) (2명, 2명, 1명)인 경우

${}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=15$

나누어진 남학생 조를 이미 나누어져있는 여학생 조에 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 $6\times15\times3!=540$

(ⅱ) (3명, 1명, 1명)인 경우

${}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=10$

나누어진 남학생 조를 이미 나누어져 있는 여학생 조에 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

그러나 각 조의 인원이 4명 이하이어야 하므로 남학생이 3명인 조는 여학생이 2명인 조와 함께 구성되는 경우의 수 $2!=2$를 제외하면 $3!-2!=4$

따라서 $6\times10\times4=240$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $540+240=780$

정답 780

4 확률

p. 83~85

3점 예상	167 ②	168 ③	169 ⑤	170 ②
4점 예상	171 23	172 37	173 ①	174 ⑤

167 확률의 뜻

이 문제의 변형 포인트!	**문항의 축소, 확대 변형**

조건을 만족하는 카드를 뽑는 수학적인 확률을 묻는 문제를 조건을 만족하는 수형도를 나누는 경우가 더 많은 수학적 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

10장의 카드에서 두 학생이 각각 서로 다른 카드를 한 장씩 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}P_2=10\times9=90$

양의 약수의 개수가 6이기 위해서는 $6=1\times6=2\times3$이므로 $N=p^5$ 또는 $N=p\times q^2$ (p, q는 서로 다른 소수)

(ⅰ) $N=p^5$인 경우

두 학생이 뽑은 카드에 적힌 수의 순서쌍은 $(2^2, 2^3)$ 또는 $(2^3, 2^2)$

(ⅱ) $N=p\times q^2$인 경우

1부터 10까지의 자연수 중 소수의 거듭제곱은 2^2, 3^2이고 소수는 2, 3, 5, 7이다.

① 두 학생이 각각 p, q^2를 택하는 경우의 수

한 학생이 2^2을 뽑으면 다른 학생은 3, 5, 7 중에서 하나를 뽑아야 한다. 한 학생이 3^2을 뽑으면 다른 학생은 2, 5, 7 중에 하나를 뽑아야 하므로 경우의 수는 $(3+3)\times2=12$

② 두 학생이 각각 pq, q를 뽑는 경우

(2, 6), (2, 10), (3, 6), (5, 10), (6, 2), (6, 3), (10, 2), (10, 5) 8가지이다.

①, ②에서 구하는 경우의 수는 $12+8=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 N의 양의 약수의 개수가 6이 되도록 카드를 뽑는 경우의 수는 $2+20=22$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{22}{90}=\dfrac{11}{45}$

정답 ②

168 확률의 덧셈정리

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

확률의 덧셈정리를 이용하여 합사건의 확률을 묻는 문제를 합사건의 조건을 변경하여 합사건의 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 ${}_6\mathrm{P}_3=6\times5\times4=120$

3의 배수인 사건을 A라 하고 5의 배수인 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 3의 배수가 되기 위해서는 각 자리 수의 합이 3의 배수이어야 하므로 $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 6\}$에서 각각 하나의 원소를 택하여 만든 자연수의 개수와 같다. 즉 $2\times2\times2\times3!=48$

(ⅱ) 5의 배수가 되기 위해서는 일의 자리 수가 0 또는 5이어야 하므로 일의 자리 수를 5로 고정하고 나머지 자리 수를 택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2=5\times4=20$

(ⅲ) 3의 배수이면서 5의 배수인 자연수의 개수는

일의 자리 수는 5이고 두 집합 $\{1, 4\}$, $\{3, 6\}$에서 각각 하나의 원소씩 택하여 나머지 두 자리 수를 정하는 경우의 수와 같으므로 $2\times2\times2!=8$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{48}{120}+\dfrac{20}{120}-\dfrac{8}{120}=\dfrac{1}{2}$

정답 ③

169 여사건의 확률

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

여사건을 이용하여 적어도 1명 이상 포함될 확률을 묻는 문제를 여사건을 이용하여 적어도 2명 이상 포함될 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

4명을 임의로 선택할 때 남학생이 적어도 2명 이상 포함되는 사건을 A라 하자.

동아리 학생 7명 중 임의로 4명을 선택하는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_4=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

남학생이 2명 미만 포함되는 경우의 수는 남학생이 1명만 포함되는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_3=4$

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{4}{35}$이므로

구하는 확률은 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{4}{35}=\dfrac{31}{35}$

정답 ⑤

170 확률의 뜻

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

경우의 수를 이용하여 확률을 묻는 문제를 수형도를 이용하여 경우의 수를 구한 후 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

총 10장의 카드 중 서로 다른 6장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_6=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

3이 적힌 카드의 수가 1이 적힌 카드의 수의 2배가 되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 3이 적힌 카드를 4장, 1이 적힌 카드를 2장 뽑는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_2=1$

(ⅱ) 3이 적힌 카드를 2장, 2가 적힌 카드를 3장, 1이 적힌 카드를 1장 뽑는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_1=48$

그러므로 3이 적힌 카드의 수가 1이 적힌 카드의 수의 2배가 되는 경우의 수는 $1+48=49$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{49}{210}=\dfrac{7}{30}$

정답 ②

171 여러 가지 사건

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

배반사건이 되도록 하는 자연수 n의 값을 묻는 문제를 조건을 조금 더 어렵게 주고 배반 사건이 되도록 하는 자연수 n의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

$a+b$의 값이 6의 약수가 나오는 순서쌍 (a, b)는

(1, 1)

(1, 2), (2, 1)

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)

이므로

$A=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

두 사건 A, B_n의 교집합이 존재하는 경우는

$(1, 1)\in A\cap B_1$

$(2, 1), (1, 2)\in A\cap B_2$

$(5, 1), (1, 5)\in A\cap B_5$

$(4, 2), (2, 4)\in A\cap B_8$

$(3, 3)\in A\cap B_9$이고

B_7은 공사건이므로

두 사건 A, B_n이 서로 배반사건이 되도록 하는 공사건이 아닌 사건 B_n은 B_3, B_4, B_6, B_{10}이다.

따라서 자연수 n의 값의 합은 $3+4+6+10=23$

정답 23

172 확률의 뜻

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

2의 거듭제곱의 합의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 확률을 묻는 문제를 행의 수를 늘려서 조건을 만족하는 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

	1열	2열	3열
1행	①	②	③
2행	④	⑤	⑥
3행	⑦	⑧	2^8

각 칸에 9개의 수를 한 개씩 임의로 적어 넣는 경우의 수는 $9!$

$L_1<L_2<L_3$, $C_1<C_2<C_3$를 만족시키기 위해서는 2^8은 3행 3열에 적어야 한다. 2^7은 오른쪽 표의 ⑤ 또는 ⑥ 또는 ⑧에 적어야 한다.

(ⅰ) 2^7을 ⑤에 적는 경우

나머지 7개의 수를 임의로 적으면 되므로 $7!$

(ⅱ) 2^7을 ⑥에 적는 경우

2^6을 2열 즉, ②, ⑤, ⑧ 중 어느 한 칸에 적고 나머지는 임의로 적는 경우의 수는 $3\times6!$

2^6을 ③에 적고 2^5을 ②, ⑤, ⑧ 중 어느 한 칸에 적고 나머지는 임의로 적는 경우의 수는 $3\times5!$

(ⅲ) 2^7을 ⑧에 적는 경우

2^6을 2행 즉, ④, ⑤, ⑥ 중 어느 한 칸에 적고 나머지는 임의로 적는 경우의 수는 $3\times6!$

2^6을 ⑦에 적고 2^5을 ④, ⑤, ⑥ 중 어느 한 칸에 적고 나머지는 임의로 적는 경우의 수는 $3\times5!$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{7!}{9!}+\frac{3\times6!+3\times5!}{9!}+\frac{3\times6!+3\times5!}{9!}$$

$$=\frac{42\times5!+(21\times5!)\times2}{9!}$$

$$=\frac{84\times5!}{9!}=\frac{84}{9\times8\times7\times6}=\frac{1}{36}$$

따라서 $p+q=36+1=37$

정답 37

173 여사건의 확률

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

원순열을 이용하여 특정한 조건을 만족하도록 자리 배치할 확률을 묻는 문제를 여사건을 이용한 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

적어도 한 쌍의 남학생과 여학생이 마주 보고 앉는 사건은

어떤 남학생과 여학생도 마주 보고 앉지 않는 사건의 여사건이다.

8명의 학생이 원형의 탁자에 둘러앉는 방법의 수는 $(8-1)!$

어떤 남학생과 여학생도 마주 보고 앉지 않으려면

남학생은 남학생끼리 여학생은 여학생끼리 마주 보고 앉아야 한다.

남학생 4명을 두 명씩 짝짓는 방법의 수는 ${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=3$

여학생 4명을 두 명씩 짝짓는 방법의 수는 ${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=3$

짝지은 네 쌍의 학생이 원형의 탁자에 둘러앉을 때

먼저 한 쌍의 학생의 자리를 고정시킨 후 나머지 세 쌍이 학생이 앉는 경우의 수는 $3!$

나머지 세 쌍의 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!\times2!\times2!$이므로

따라서 어떤 남학생과 여학생도 마주 보고 앉지 않을 확률은

$$\frac{3\times3\times3!\times2!\times2!\times2!}{(8-1)!}=\frac{3}{35}$$

구하고자하는 확률은 $1-\frac{3}{35}=\frac{32}{35}$

정답 ①

174 확률의 덧셈정리

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

합의 법칙을 이용하여 확률을 묻는 문제를 주어진 사건을 서로소인 여러 개의 합사건을 이용하여 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

두 학생이 가진 전체 공은 1이 적힌 공 5개, 2가 적힌 공 5개이므로 공에 적힌 수의 합은 15이다. 각 학생이 가진 공에 적힌 수의 합의 차가 1이기 위해서는 각 학생이 가진 공에 적힌 수의 합이 각각 7, 8이어야 하고 각 학생은 5개씩 공을 갖고 있으므로 한 학생은 1이 적힌 공 2개, 2가 적힌 공 3개, 다른 학생은 1이 적힌 공 3개, 2가 적힌 공 2개를 갖고 있어야 한다.

2개씩 공을 교환한 후 각 학생이 가진 공에 따라 다음과 같은 경우가 있다.

(ⅰ) A학생은 1이 적힌 공 2개, 2가 적힌 공 3개를 갖고 있고 B학생은 1이 적힌 공 3개, 2가 적힌 공 2개를 가진 경우

서로 같은 수가 적힌 공을 서로 교환해야 하므로

1이 적힌 공 2개씩 교환하는 경우의 수는 ${}_2C_2\times{}_3C_2=3$

1이 적힌 공 1개, 2가 적힌 공 1개씩 교환하는 경우의 수는

$({}_2C_1\times{}_3C_1)\times({}_3C_1\times{}_2C_1)=36$

2가 적힌 공 2개씩 교환하는 경우의 수는 ${}_3C_2\times{}_2C_2=3$

이 경우의 수는 $3+36+3=42$

(ⅱ) A학생은 1이 적힌 공 3개, 2가 적힌 공 2개를 갖고 있고 B학생은 1이 적힌 공 2개, 2가 적힌 공 3개를 가진 경우

A학생은 2가 적힌 공 2개를 주고, B학생은 1이 적힌 공 1개, 2가 적힌 공 1개를 주는 경우의 수는 ${}_3C_2\times({}_3C_1\times{}_2C_1)=18$

A학생은 1이 적힌 공 1개, 2가 적힌 공 1개를 주고, B학생은 1가 적힌 공 2개를 주는 경우의 수는 $({}_2C_1\times{}_3C_1)\times{}_3C_2=18$

이 경우의 수는 $18+18=36$

두 학생 A, B가 서로 2개씩 공을 교환하는 경우의 수는

${}_5C_2\times{}_5C_2=100$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{42}{100}+\frac{36}{100}=\frac{78}{100}=\frac{39}{50}$$

정답 ⑤

5 조건부확률

p. 86~89

3점 예상	175 ②	176 ④	177 ⑤	178 ③	179 650
	180 155				
4점 예상	181 ④	182 ①	183 ②		

175 조건부확률

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

주어진 표를 이용하여 조건부확률을 묻는 문제를 간단한 표로 정리된 조건부확률을 묻는 문제로 변형하였다.

입상한 세 명이 모두 A고등학교에 재학 중인 사건을 A라 하고 B고등학교에 재학 중인 사건을 B라 하자.

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}$

입상한 세 명이 모두 여학생인 사건을 C라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(C|A\cup B)$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{{}_8\mathrm{C}_3+{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C\cap(A\cup B))&=\mathrm{P}((C\cap A)\cup(C\cap B))\\&=\mathrm{P}(C\cap A)+\mathrm{P}(C\cap B)\\&=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}\\&=\frac{{}_5\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{40}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(C|A\cup B)=\frac{\mathrm{P}(C\cap(A\cup B))}{\mathrm{P}(A\cup B)}=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{8}$$

정답 ②

176 확률의 곱셈정리

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

표가 주어지지 않은 조건부확률과 확률의 곱셈정리를 이용하여 상황에 맞는 확률을 묻는 문제를 조건부확률과 여사건을 이용하여 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

후반전 종료 시 승리하는 사건을 A라 하고 후반전 종료 시 비기는 사건을 B라 하자.

연장경기 종료 시 승리하는 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{3}{10}$, $\mathrm{P}(C|B)=\dfrac{4}{9}$

따라서 K 국가대표 축구팀이 어느 경기에서 전반전을 앞서고 있는 상황에서 끝냈을 때 이 경기에서 최종 승리할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)&=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)P(C|B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{19}{30}\end{aligned}$$

정답 ④

177 사건의 독립과 종속

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

독립사건인 경우의 조건부확률과 확률의 곱셈정리를 이용하여 동시에 일어날 확률을 묻는 문제를 독립사건과 여사건의 확률을 이용하여 합사건의 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B도 서로 독립이고 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)$

$\mathrm{P}(A)=x$라 하면

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(B^C)=1-x$

$\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{2}(1-x)$

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=x\times\dfrac{1}{2}(1-x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{3}{25}$

$25x^2-25x+6=0$

$(5x-3)(5x-2)=0$

$x=\dfrac{2}{5}$ 또는 $x=\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{P}(A)=x>\dfrac{1}{2}$이므로 $x=\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{12}{25}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{12}{25}=\dfrac{23}{25}$

정답 ⑤

178 독립시행의 확률

이 문제의 변형 포인트! **개념, 원리 활용**

조건을 만족시키는 시행횟수를 구한 후 한 번의 시행으로 사건이 일어날 확률을 구하고 독립시행의 확률을 이용하여 확률을 묻는 문제를 한 번의 시행으로 사건이 일어날 확률이 정해지는 경우 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족하는 시행횟수를 묻는 문제로 변형하였다.

같은 룰렛을 n번 반복하여 돌리는 독립시행에서 2000원, 3000원의 상금을 받기 위해서는 각각 2번, 3번 당첨되어야 하므로

2000원의 상금을 받을 확률은 ${}_n\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$

3000원의 상금을 받을 확률은 ${}_n\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$

${}_n\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}\le 2\times{}_n\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$

$\dfrac{n(n-1)}{2}\times\dfrac{3^{n-2}}{4^n}\le\dfrac{2n(n-1)(n-2)}{3!}\times\dfrac{3^{n-3}}{4^n}$

$3\le\dfrac{2(n-2)}{3}$

$9\le 2n-4$

$n\ge\dfrac{13}{2}$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7

정답 ③

179 사건의 독립과 종속

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

두 사건이 서로 독립이 되도록 하는 표본공간의 원소의 개수를 묻는 문제를 두 사건이 서로 독립이 되도록 하는 곱사건의 원소의 개수를 묻는 문제로 변형하였다.

지지도 조사에 참여한 사람 중 임의로 택한 사람이 40대 미만인 사건을 X라 하고 후보 A를 지지하는 사건을 Y라 하자. 두 사건 X, Y는 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y)$가 성립한다.

$\mathrm{P}(X)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(Y)=\frac{120}{n}$이므로

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y)=\frac{3}{5}\times\frac{120}{n}=\frac{72}{n}$

그러므로 후보 A를 지지하는 40대 미만의 연령층의 사람 수는

$\frac{72}{n}\times n=72$

지지도 조사에 참여한 n명의 사람 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

연령 \ 지지 여부	지지한다.	지지하지 않는다.	계
40대 미만	72	$\frac{3}{5}n-72$	$\frac{3}{5}n$
40대 이상	48	$\frac{2}{5}n-48$	$\frac{2}{5}n$
계	120	$n-120$	n

후보 A를 지지하지 않는 40대 이상 연령층의 사람 수가 212이므로

$\frac{2}{5}n-48=212$

$\frac{2}{5}n=260$

따라서 $n=650$

정답 650

180 독립시행의 확률

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

주사위를 던지는 독립시행에서 조건에 따라 움직일 때 원과 점이 만날 확률을 묻는 문제를 독립시행의 확률을 활용하여 순서를 번갈아가며 하는 게임에서 승리할 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

B가 4번째 공을 던질 때까지 A는 3점 미만의 점수를 얻어야 하므로 4번 중 2번 이하의 골을 성공시켜야 한다. 이 확률은

${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1+8+24}{81}=\frac{33}{81}$

B가 4번째 공을 던져 승리하기 위해서는 공을 3번 던졌을 때 2번 골을 성공시키고 4번째 공을 던져 골을 성공시켜야 하므로 이 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

두 학생 A, B가 골을 성공시키는 사건은 서로 독립적이므로 B가 4번째 공을 던져 승리할 확률은 $\frac{33}{81}\times\frac{3}{16}=\frac{11}{144}$

따라서 $p+q=144+11=155$

정답 155

181 조건부확률

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

표가 주어지지 않은 경우의 조건부확률을 묻는 문제를 사건의 정의에 따라서 조건부확률을 묻는 문제로 변형하였다.

임의로 선택한 1개의 주화가 은색인 사건을 A라 하고 호랑이 캐릭터가 새겨져 있는 사건을 B라 하자.

400개의 기념주화 중 금색 주화가 240개이므로 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{240}{400}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

400개의 기념주화 중 호랑이 캐릭터가 새겨진 은색 주화는 100개이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{100}{400}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{4}+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{3}{20}$

총 400개의 기념주화 중 호랑이 캐릭터가 새겨져 있는 주화는 200개이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{3}{20}+\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{2}-\frac{3}{20}=\frac{7}{20}$

따라서 전체 기념주화 중 임의로 선택한 1개에 곰 캐릭터가 새겨져 있을 때 이 주화가 금색일 확률은

$$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{7}{20}}{\frac{1}{2}}=\frac{7}{10}$$

정답 ④

182 조건부확률

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

주어진 상황을 표로 만들어 조건부확률을 묻는 문제를 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}$임을 이용하여 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률을 이용하여 조건부확률을 묻는 문제로 변형하였다.

이 공장에서 생산된 모니터 중 임의로 한 대를 선택하였을 때, 그 모니터가 α테스트를 통과한 제품인 사건을 A라 하고 β테스트를 통과한 제품인 사건을 B라 하자.

이 공장에서 생산된 모니터 중 임의로 선택한 한 대의 모니터가 합격품으로 인정된 제품인 사건은 $A\cup B$이므로 이 공장에서 생산된 모니터 중 임의로 선택한 한 대의 모니터가 합격품으로 인정된 모니터일 때 α테스트를 통과하지 못했을 확률은

$\mathrm{P}(A^C|A\cup B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap(A\cup B))}{\mathrm{P}(A\cup B)}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\\&=1-\frac{1}{20}\times\frac{1}{5}\end{aligned}$$

$=\frac{99}{100}$

이고 $\mathrm{P}(A^C\cap(A\cup B))=\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{20}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{25}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C|A\cup B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap(A\cup B))}{\mathrm{P}(A\cup B)}=\frac{\frac{1}{25}}{\frac{99}{100}}=\frac{4}{99}$

정답 ①

183 확률의 곱셈정리

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

앞에서 일어난 사건의 결과에 따라 다음 사건이 영향을 받는 사건의 확률을 묻는 문제를 같은 형태의 문제로 조건을 바꾸어 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

주머니 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내었을 때 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 사건을 X라 하고 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 사건을 Y라 하자.

$\mathrm{P}(X)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5}$

(i) 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 때 이 공을 모두 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 4개와 검은 공 3개가 있으므로

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y|X)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{35}$

(ii) 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공이 아닐 때, 즉 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공이 하나는 흰 공, 하나는 검은 공일 때 이 공을 모두 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 4개가 있으므로

$\mathrm{P}(Y|X^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

$\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y|X^C)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{2}{35}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\frac{6}{35}+\frac{2}{35}=\frac{8}{35}$

정답 ②

6 이산확률변수의 확률분포

p. 90~91

3점 예상	184 ③ 185 ② 186 ② 187 21 188 36
4점 예상	189 ②

184 이산확률변수의 평균과 분산

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

이산확률변수의 기댓값이 주어진 경우 미지수를 묻는 문제를 이산확률변수의 기댓값을 주고 분산을 묻는 문제로 변형하였다.

주머니 속에 든 공 중 3이 적혀 있는 공의 개수를 x라 하면 2가 적혀 있는 공의 개수는 $x+2$, 1이 적혀 있는 공의 개수는 $8-2x$이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{8-2x}{10}$	$\frac{x+2}{10}$	$\frac{x}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{8-2x}{10}+2\times\frac{x+2}{10}+3\times\frac{x}{10}$

$=\frac{(8-2x)+(2x+4)+3x}{10}$

$=\frac{3x+12}{10}$

$=\frac{3}{2}$

따라서 $x=1$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{1^2\times6+2^2\times3+3^2}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$=\frac{27}{10}-\frac{9}{4}$

$=\frac{9}{20}$

정답 ③

185 이산확률변수의 평균과 분산

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

확률분포표와 기댓값이 주어졌을 때 분산을 묻는 문제를 확률분포표를 이용하여 기댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

확률의 총합은 1이므로 $3a+2b+\frac{1}{4}=1$

즉, $3a+2b=\frac{3}{4}$

확률은 0 또는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\frac{3}{4}=3a+2b\geq2\sqrt{6ab}$ (단, 등호는 $3a=2b$일 때 성립)

$a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{3}{16}$이므로

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{3}{16}+4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{3}{16}=\frac{25}{8}$

따라서 $p+q=33$

정답 ②

186 이산확률변수의 평균과 분산

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

확률질량함수를 이용한 미지수를 묻는 문제를 확률질량함수를 이용하여 기댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

확률의 총합의 1이므로

$\sum_{x=1}^{10}kx(x+1)=k\sum_{x=1}^{10}(x^2+x)$

$=k\times\left(\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\right)$

$=440k=1$

따라서 $k=\frac{1}{440}$

$$E(4X)=4\sum_{x=1}^{10}xP(X=x)$$
$$=4\sum_{x=1}^{10}\frac{1}{440}x^2(x+1)$$
$$=\frac{4}{440}\sum_{k=1}^{10}(x^3+x^2)$$
$$=\frac{1}{110}\left\{\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+\frac{10\times11\times21}{6}\right\}$$
$$=31$$

정답 ②

187 확률질량함수

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

조건을 만족하는 확률질량함수의 관계식에서 미지수를 묻는 문제를 조건을 만족하는 확률질량함수를 구하여 확률의 합을 묻는 문제로 변형하였다.

$P(X=1)=a$라 하면

$k=1$일 때 $P(X=2)=P(X=1)=a$

$k=2$일 때 $P(X=3)=2P(X=2)=2a$

$k=3$일 때 $P(X=4)=3P(X=3)=6a$

$k=4$일 때 $P(X=5)=4P(X=4)=24a$

$\sum_{k=1}^{5}P(X=k)=a+a+2a+6a+24a=34a=1$

따라서 $a=\frac{1}{34}$

$P(X=3)+P(X=4)=2a+6a=8a=\frac{8}{34}=\frac{4}{17}$이므로

$p+q=17+4=21$

정답 21

188 이항분포의 평균과 분산

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

이항분포에서 분산을 묻는 문제를 기댓값의 조건을 만족하는 자연수 n의 값을 묻는 문제로 변형하였다.

두 학생이 가위바위보를 하여 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $3\times3=9$

이 중에 A학생이 이기는 경우는 (바위, 가위), (가위, 보), (보, 바위) 의 세 가지 경우이므로 A학생이 이길 확률은 $\frac{1}{3}$

두 학생 A, B가 가위바위보를 n번 시행하였을 때 A학생이 이긴 횟수를 확률변수 Y라고 하면 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르고 이때 확률질량함수는

$P(Y=y)={}_{n}C_{y}\left(\frac{1}{3}\right)^{y}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-y}$ $(y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

$E(Y)=np=\frac{n}{3}$

A학생이 얻는 점수의 합은 $X=3Y+(n-Y)=2Y+n$이므로

$E(X)=E(2Y+n)=2E(Y)+n=\frac{2}{3}n+n=\frac{5}{3}n$

$\frac{5}{3}n\geq60$이므로

$n\geq36$

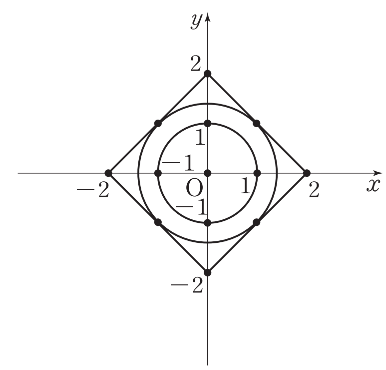
따라서 자연수 n의 최솟값은 36

정답 36

189 확률변수 $aX+b$의 평균과 분산

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

좌표평면에서 확률변수를 정의하고 분산을 묻는 문제를 부등식의 영역을 이용하여 확률변수를 정의하고 기댓값을 묻는 문제로 변형하였다.



오른쪽 그림과 같이 x좌표와 y좌표가 모두 정수이고 부등식 $|x|+|y|\leq2$를 만족시키는 점의 개수는 13이므로 서로 다른 두 점을 택하는 경우의 수는 ${}_{13}C_2=78$

2점을 나타내는 점의 개수는 5, 1점을 나타내는 점의 개수는 4, 0점을 나타내는 점의 개수는 4

$X=0$인 경우 0점을 나타내는 점 2개를 택해야 하므로

$P(X=0)=\frac{{}_{4}C_{2}}{78}=\frac{1}{13}$

$X=1$인 경우 1점을 나타내는 점 1개와 0점을 나타내는 점 1개를 택해야 하므로 $P(X=1)=\frac{{}_{4}C_{1}\times{}_{4}C_{1}}{78}=\frac{8}{39}$

$X=2$인 경우 1점을 나타내는 점 2개 또는 2점을 나타내는 점 1개와 0점을 나타내는 점 1개를 택해야 하므로

$P(X=2)=\frac{{}_{4}C_{2}}{78}+\frac{{}_{5}C_{1}\times{}_{4}C_{1}}{78}=\frac{26}{78}=\frac{1}{3}$

$X=3$인 경우 2점을 나타내는 점 1개와 1점을 나타내는 점 1개를 택해야 하므로

$P(X=3)=\frac{{}_{5}C_{1}\times{}_{4}C_{1}}{78}=\frac{20}{78}=\frac{10}{39}$

$X=4$인 경우 2점을 나타내는 점 2개를 택해야 하므로

$P(X=4)=\frac{{}_{5}C_{2}}{78}=\frac{10}{78}=\frac{5}{39}$

그러므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{39}$	$\frac{5}{39}$	1

$$E(X)=1\times\frac{8}{39}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{10}{39}+4\times\frac{5}{39}$$
$$=\frac{8+26+30+20}{39}=\frac{84}{39}=\frac{28}{13}$$

이므로 $E(13X+4)=13E(X)+4=13\times\frac{28}{13}+4=32$

정답 ②

7 연속확률변수의 확률분포

p. 92~94

3점 예상	190 ⑤	191 ③	192 23
4점 예상	193 ⑤	194 ①	195 ①

190 연속확률변수의 확률분포

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

연속확률변수의 확률밀도함수를 주어진 확률 조건을 이용하여 미지수를 구한 후 확률을 묻는 문제를 확률밀도함수의 대칭조건을 이용하여 확률밀도함수를 구한 후 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

$-3\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이고 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭이므로 $0\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이는 $\frac{1}{2}$이다.

$\frac{1}{2}\times 3\times(4a+a)=\frac{15}{2}a=\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{15}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(-2\le x\le 1)&=\mathrm{P}(-2\le x\le 0)+\mathrm{P}(0\le x\le 1)\\&=\mathrm{P}(0\le x\le 2)+\mathrm{P}(0\le x\le 1)\\&=\frac{1}{2}\times 2\times\left(\frac{4}{15}+\frac{2}{15}\right)+\frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{4}{15}+\frac{3}{15}\right)\\&=\frac{6}{15}+\frac{7}{30}\\&=\frac{19}{30}\end{aligned}$$

정답 ⑤

191 정규분포

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

정규분포곡선의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 확률을 묻는 문제를 정규분포 곡선에서 제한된 범위의 확률이 최대일 때 기댓값을 구한 후 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

$f(x)=\mathrm{P}(x\le X\le x+8)$가 $x=32$에서 최댓값을 가지므로

$\mathrm{E}(X)=\frac{32+(32+8)}{2}=36$

확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=36$에 대하여 대칭이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.

$\mathrm{P}(X\ge 40)=0.31$이므로

$\mathrm{P}(36\le X\le 40)=0.5-\mathrm{P}(X\ge 40)=0.5-0.31=0.19$

즉, $\mathrm{P}(32\le X\le 36)=\mathrm{P}(36\le X\le 40)=0.19$

$\mathrm{P}(26\le X\le 32)=\mathrm{P}(40\le X\le 46)=0.20$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(36\le X\le 46)&=\mathrm{P}(36\le X\le 40)+\mathrm{P}(40\le X\le 46)\\&=0.19+0.2=0.39\end{aligned}$$

즉, $\mathrm{P}(X\ge 46)=1-\mathrm{P}(36\le X\le 46)=0.5-0.39=0.11$

따라서 $\mathrm{P}(32\le X\le 36)+\mathrm{P}(X\ge 46)=0.19+0.11=0.30$

정답 ③

192 이항분포와 정규분포의 관계

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

이차함수의 판별식과 이항분포를 이용하여 원하는 확률을 만족하는 미지수의 값을 묻는 문제를 원과 직선의 관계를 이용하여 조건을 만족하는 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

직선 $ax+by+5=0$과 원 $x^2+y^2=1$이 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $ax+by+5=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1보다 작아야 한다.

즉, $\frac{5}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$

$25<a^2+b^2$ …… ㉠

이어야 한다.

한편 두 개의 주사위를 던져서 나오는 모든 경우의 수는 36이고 이 중 ㉠을 만족시키는 경우는

$(1,\ 5),\ (1,\ 6)$

$(2,\ 5),\ (2,\ 6)$

$(3,\ 5),\ (3,\ 6)$

$(4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6)$

$(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6)$

$(6,\ 1),\ (6,\ 2),\ (6,\ 3),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)$

이므로 한 번의 시행에서 직선과 원이 서로 다른 두 점에서 만날 확률은

$\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$

이 시행을 1260회 반복했을 때 직선과 원이 서로 다른 두 점에서 만나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1260,\ \frac{7}{12}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=1260\times\frac{7}{12}=735,\ \mathrm{V}(X)=1260\times\frac{7}{12}\times\frac{5}{12}=\left(\frac{35}{2}\right)^2$

이때 시행횟수가 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(735,\ 17.5^2)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 700)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{700-735}{17.5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.477\\&=0.023\end{aligned}$$

따라서 $1000\mathrm{P}=1000\times 0.023=23$

정답 23

193 정규분포

이 문제의 변형 포인트! **문항의 축소, 확대 변형**

정규분포를 따르는 두 확률변수의 확률이 같아지는 미지수를 묻는 문제를 정규분포를 따르는 두 확률변수의 확률이 같을 때 확률변수의 기댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(22\le X\le 26)&=\mathrm{P}\left(\frac{22-30}{\sigma}\le Z\le\frac{26-30}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{8}{\sigma}\le Z\le -\frac{4}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}(44\le Y\le a)=\mathrm{P}\left(\frac{44-m}{\frac{\sigma}{2}}\le Z\le\frac{46-m}{\frac{\sigma}{2}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{88-2m}{\sigma}\le Z\le\frac{92-2m}{\sigma}\right)$$

(i) $\mathrm{P}\left(-\frac{8}{\sigma}\le Z\le-\frac{4}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{88-2m}{\sigma}\le Z\le\frac{92-2m}{\sigma}\right)$인 경우

$-4=92-2m$, $m=48$

(ii) $\mathrm{P}\left(\frac{4}{\sigma}\le Z\le\frac{8}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{88-2m}{\sigma}\le Z\le\frac{92-2m}{\sigma}\right)$인 경우

$8=92-2m$, $m=42$

따라서 m의 최솟값은 42

정답 ⑤

194 표준정규분포

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

표준정규분포표를 이용하여 정규분포를 따르는 확률변수의 조건을 만족하는 확률을 묻는 문제를 정규분포를 따르는 두 확률변수 사이의 관계를 이용하여 기댓값과 분산을 구한 후 표준정규분포표를 이용하여 확률을 묻는 문제로 변형하였다.

A기계에서 박음질된 부분의 길이를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(26,\ \sigma^2)$을 따르고 B기계에서 박음질된 부분의 길이를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(27.2,\ 4\sigma^2)$을 따른다.

A기계에서 박음질되는 부분의 길이의 불량률은 5%이므로

$$\mathrm{P}(24.4\le X\le 27.6)=\mathrm{P}\left(\frac{24.4-26}{\sigma}\le Z\le\frac{27.6-26}{\sigma}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(-\frac{1.6}{\sigma}\le Z\le\frac{1.6}{\sigma}\right)$$

$$=1-0.05$$

$$=0.95$$

$\frac{1.6}{\sigma}=2$이므로 $\sigma=0.8$

즉 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(27.2,\ 1.6^2)$을 따르므로 B기계에서 박음질된 부분의 길이가 정상으로 분류될 확률은

$$\mathrm{P}(24.4\le Y\le 27.6)=\mathrm{P}\left(\frac{24.4-27.2}{1.6}\le Z\le\frac{27.6-27.2}{1.6}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(-\frac{2.8}{1.6}\le Z\le\frac{0.4}{1.6}\right)$$

$$=\mathrm{P}(-1.75\le Z\le 0.25)$$

$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.75)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.25)$$

$$=0.4599+0.0987$$

$$=0.5586$$

따라서 불량률은 $1-0.5586=0.4414$

정답 ①

195 정규분포

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

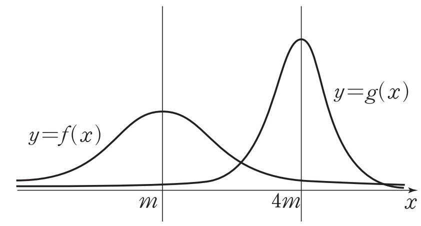
정규분포를 따르는 두 확률변수에 대해서 조건식이 성립할 때 평균과 분산과 확률에 대한 합답형 문제를 기댓값과 분산이 각각 주어진 두 확률변수의 조건에 따른 함숫값의 범위에 대한 합답형 문제로 변형하였다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 각각 직선 $x=m$, $x=4m$에 대해 대칭이다.

ㄱ. $\sigma_1=\sigma_2$이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모양은 서로 같다. 곡선 $y=f(x-2m)$은 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $2m$만큼 평행이동한 곡선이므로 직선 $x=3m$에 대하여 대칭이고, 곡선 $y=g(x+m)$은 곡선 $y=g(x)$를 x축의 방향으로 $-m$만큼 평행이동한 곡선이므로 직선 $x=3m$에 대하여 대칭이다.

그러므로 $f(x-2m)=g(x+m)$이다. (참)

ㄴ. $\sigma_1>\sigma_2$이면 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$보다 완만하다.



그러므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 $m<x<4m$, $x>4m$에서 각각 한 점에서 만난다.

즉, $f(\alpha)=g(\alpha)$이면 $m<\alpha<4m$ 또는 $\alpha>4m$이다. (거짓)

ㄷ. $\mathrm{P}(X\le 3m)=\mathrm{P}(Y\ge 3m)$이면

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3m-m}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{3m-4m}{\sigma_2}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{2m}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{-m}{\sigma_2}\right)$

$\frac{2m}{\sigma_1}=\frac{m}{\sigma_2}$이어야 하므로 $2\sigma_2=\sigma_1$

즉, $\sigma_1>\sigma_2$이므로 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$보다 완만하고 각 곡선의 대칭축에서의 함숫값 $g(4m)$, $f(m)$의 대소 관계는 $g(4m)>f(m)$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

정답 ①

8 통계적 추정

p. 95~96

3점 예상	196 ④	197 ①	198 90
4점 예상	199 ③	200 369	

196 표본평균의 확률분포

이 문제의 변형 포인트!	개념, 원리 활용

크기가 주어진 표본평균의 확률분포를 만족하는 미지수를 묻는 문제를 표본평균이 어떤 범위 안에 들기 위한 최솟값을 묻는 문제로 변형하였다.

이 지역에서 판매되는 생과일주스 1잔의 가격을 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3500,\ 200^2)$을 따른다. 즉, $\mathrm{E}(X)=3500$, $\mathrm{V}(X)=200^2$, $\sigma(X)=200$

크기가 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=3500$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{200^2}{25}=40^2$, $\sigma(\overline{X})=\frac{200}{\sqrt{25}}=40$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(3500,\ 40^2)$을 따르고, 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-3500}{40}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다. 표본평균 $\overline{X}$의 최

소평균가격을 k원이라 하면

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq k)=0.0228$

$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k-3500}{40}\right)=0.0228$

$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k-3500}{40}\right)=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-3500}{40}\right)=0.0228$

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-3500}{40}\right)=0.4772$

$\frac{k-3500}{40}=2$

따라서 $k=3500+2\times40=3580$

정답 ④

197 모평균의 추정

이 문제의 변형 포인트!	문항의 축소, 확대 변형

크기가 다를 때 표본평균을 이용한 신뢰구간을 묻는 문제를 표본의 크기에 따른 신뢰구간의 길이를 묻는 문제로 변형하였다.

크기가 36인 표본으로부터 구한 표본평균의 값을 $\overline{x_1}$라 하면

이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{6}\leq m\leq\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{6}$

이므로

$b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{6}=12$

따라서 $\sigma=\frac{36}{1.96}$ …… ㉠

크기가 100인 표본으로부터 구한 표본평균의 값을 $\overline{x_2}$라 하면

이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-1.96\times\frac{\sigma}{10}\leq m\leq\overline{x_2}+1.96\times\frac{\sigma}{10}$

㉠을 대입하면

따라서 $d-c=2\times1.96\times\frac{\sigma}{10}=\frac{72}{10}=\frac{36}{5}$

정답 ①

198 모평균의 추정

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

표본의 크기와 신뢰구간이 주어졌을 때 표준편차를 묻는 문제를 표본의 크기와 신뢰구간이 주어졌을 때 표본평균과 표준편차의 곱을 묻는 문제로 변형하였다.

표본평균 $\overline{X}$를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{X}-1.96\times\frac{\sigma}{8}\leq m\leq\overline{X}+1.96\times\frac{\sigma}{8}$

따라서 $\overline{X}-1.96\times\frac{\sigma}{8}=30.8$ …… ㉠

$\overline{X}+1.96\times\frac{\sigma}{8}=32.2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 양변을 더하면

$2\overline{X}=63$

$\overline{X}=\frac{63}{2}=31.5$

이를 ㉠에 대입하면

$\sigma=(31.5-30.8)\times\frac{8}{1.96}=0.7\times\frac{2}{0.49}=\frac{20}{7}$

따라서 $\overline{X}\times\sigma=31.5\times\frac{20}{7}=4.5\times20=90$

정답 90

199 모평균의 추정

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

신뢰구간의 길이에 대한 조건이 주어졌을 때 표본의 크기의 최솟값을 묻는 문제를 표본의 크기를 두 가지로 하여 구한 신뢰구간 사이의 관계식을 이용하여 표본의 크기의 최댓값을 묻는 문제로 변형하였다.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 98인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{98}}\leq m\leq\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{98}}$

따라서 $b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{98}}$

같은 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq m\leq\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서 $d-c=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$43(b-a)\leq28(d-c)$

$43\times2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{98}}\leq28\times2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\frac{7}{\sqrt{98}}\leq\frac{6}{\sqrt{n}}$

$7\sqrt{n}\leq6\times\sqrt{98}$

즉, $49n\leq6^2\times98$

따라서 $n\leq72$이므로 n의 최댓값은 72

정답 ③

200 표본비율의 확률분포

이 문제의 변형 포인트!	자료 상황의 활용

표본의 크기가 정해진 표본비율을 이용하여 조건을 만족하는 미지수를 묻는 문제를 표본의 크기가 정해진 표본비율을 이용하여 조건을 만족하는 미지수의 값들의 곱을 묻는 문제로 변형하였다.

이 농장에서 재배하는 귤 중 임의추출한 200개 중에서 특상품인 것의 비율을 $\hat{p}$이라 하면

$\mathrm{E}(\hat{p})=p$, $\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{200}$, $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}$

확률변수 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{p(1-p)}{200}\right)$을 따르고, 확률변수 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}}$은 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\hat{p}\geq0.15)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{0.15-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}}\right)$

$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{0.15-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}}\right)=0.0401$$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{0.15-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}}\right)=0.4599$이므로 $\frac{0.15-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}}=1.75$

$$\frac{\frac{3-20p}{20}}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{10\sqrt{2}}}=\frac{7}{4}$$

$2\sqrt{2}(3-20p)=7\sqrt{p(1-p)}$

양변을 제곱하면

$3249p^2-1009p+72=0$

근과 계수와의 관계에 의해서

p의 값들의 곱은 $\frac{72}{3249}=\frac{8}{361}$

따라서 $a+b=8+361=369$

정답 369